JRAG
نشریه پژوهش های ژئوفیزیک کاربردی
دوره ۸، شماره ۲، ۱۴۰۱، صفحات ۱۱۵-۱۲۷
شناسه دیجیتال (DOI): 10.22044/JRAG.2021.10209.1305

انتخاب بهینه پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک

عارف زینال‌پور*[1]، غلامرضا کمالی[2]، علی مرادزاده[3] و محمد رضایی[4]

۱- دانشجوی دکتری؛ دانشکده فنی مهندسی، گروه معدن، دانشگاه باهنر کرمان
۲- دانشیار؛ دانشکده فنی مهندسی، گروه معدن، دانشگاه باهنر کرمان
۳- استاد؛ دانشکده مهندسی معدن، پردیس دانشکده فنی دانشگاه تهران
۴- استادیار؛ دانشکده مهندسی معدن، گروه معدن، دانشگاه ملایر

دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۰۳

* نویسنده مسئول مکاتبات: aref.zainalpour@gmail.com

واژگان کلیدی

بوشلی (نیر)،
زمین گرمایی،
مگنتوتلوریک،
الگوریتم وارون‌سازی دو بعدی،
پارامتر منظم‌سازی،
دو قطری سازی لنکزوس.

چکیده

مدل‌سازی وارون داده‌های مگنتوتلوریک به عنوان یک مساله غیرخطی و بدحالت شناخته شده است، بنابراین برای به دست آوردن نتایجی معنی‌دار و منحصربه‌فرد، به طور معمول از روش منظم‌سازی تیخونوف برای حل آن استفاده می‌شود. همچنین انتخاب بهینه پارامتر منظم‌سازی از دیگر فاکتورهای مهم برای دستیابی به مدل‌سازی وارون مناسب است. هدف از انجام این تحقیق، یافتن مقداری بهینه برای پارامتر منظم‌سازی، در وارون‌سازی دو بعدی داده‌های مگنتوتلوریک براساس الگوریتم دوقطری سازی لنکزوس می‌باشد که بهترین ترکیب را با این روش برای بهبود دقت مدل‌سازی و افزایش سرعت وارون‌سازی ساختارهای زیرسطحی لحاظ کند. برای این منظور دو روش متداول، اعتبارسنجی تقاطعی[1] و متعادل‌سازی قید فعال[2] بررسی و با روش جدید، منظم‌سازی انطباقی[3] به عنوان روشی اتوماتیک و بهینه در الگوریتم وارون‌سازی دو بعدی داده‌های مگنتوتلوریک در مقیاس بزرگ مقایسه خواهند شد. همچنین برای افزایش سرعت مدل‌سازی وارون از روش دو قطری سازی لنکزوس[4] استفاده شده است. روش‌های مذکور در محیط متلب کد نویسی و در برنامه الگوریتم پایه MT2DInvMatlab لحاظ گردید. تخمین‌های انجام یافته برای پارامتر منظم‌سازی، بر روی یک مدل مصنوعی با اعمال ۳ درصد نوفه تصادفی و همچنین داده‌های واقعی زمین گرمایی منطقه بوشلی (نیر) سبلان انجام شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که علیرغم توانمندی همه روش‌ها در انتخاب پارامتر منظم‌سازی، روش معرفی شده به لحاظ پارامترهای اندازه‌گیری شده از نظر میزان حافظه مورد نیاز، زمان سپری شده، همگرایی به مدل مطلوب در تکرارهای کمتر و همچنین دقت مدل‌سازی بر سایر روش-های مرسوم ارجحیت دارد. همچنین به کارگیری این روش برای داده‌های واقعی نشان از توانمندی این روش در تولید یک مدل بهینه وارون دارد.

1-GCV: Generalized Cross Validation
2-ACB: Active Constraint Balancing
3-Adaptive Regularization
4-Lanczos Bidiagonalization

۱- مقدمه

در اوایل قرن بیستم، مفهوم مسائل بد وضع[1] توسط هدامرد[2] (۱۹۲۳) مطرح شد. طبق این تعریف، مسائلی بد وضع به شمار می‌آیند که جواب یکتایی برای حل آن وجود نداشته باشد و اگر این جواب وجود دارد تابع پیوسته از داده‌ها نمی‌باشد. مسائل وارون‌سازی عمدتا جزء مسائل بد وضع هستند. مدل‌سازی وارون داده‌های مگنتوتلوریک (MT) نیز به عنوان یک مساله غیرخطی و بد وضع شناخته شده است. بنابراین برای به دست آوردن نتایجی قابل قبول و منحصربه‌فرد، به طور معمول از روش منظم‌سازی تیخونوف برای حل آن استفاده می‌شود (Newman and Alumbaugh, 2000). روش تیخونوف یکی از مهم‌ترین روش‌ها در منظم‌سازی مسائل بد وضع است (Tikhonov and Arsenin, 1977). عمده مسائل مربوط به وارون‌سازی در ژئوفیزیک و به ویژه مگنتوتلوریک از این روش برای دستیابی به راه‌حل‌هایی یکتا و پایدار استفاده می‌کنند (Lee et al., 2009; Sasaki, 2004; Rodi and Mackie, 2001; Siripunvaraporn and Egbert, 2000; Smith and Booker, 1991; Constable et al., 1987).

به طور کلی حالت گسسته از مساله وارون MT براساس روش منظم‌سازی تیخونف از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$P(m) = \phi(d) + \lambda^2 \phi(m) \qquad (۱)$$

این فرمول شامل دو مؤلفه اصلی عدم برازش داده ($\phi(d)$) و تثبیت کننده مدل ($\phi(m)$) است. m بردار پارامترهای مدل و $P(m)$ تابع هدف که از طریق به حداقل رساندن آن می‌توان به نتایج وارون‌سازی مطلوب دست یافت. λ یک پارامتر اساسی در روش وارون‌سازی است که به عنوان پارامتر منظم‌سازی یا ضریب لاگرانژ شناخته می‌شود و تعادل نسبی بین پارامتر تثبیت کننده مدل و عدم برازش داده را تنظیم می‌کند. به طوری که اگر λ مقدار کوچکی انتخاب شود از اهمیت پایداری مدل کاسته می‌شود و همچنین اگر λ مقدار بزرگی انتخاب شود تأثیر میزان برازش داده‌ها کم می‌شود. در نتیجه، برآورد مقداری مناسب برای پارامتر منظم‌سازی برای تولید یک مدل ایده‌آل از اهمیت زیادی برخوردار است (Farquharson and Oldenburg, 2004). روش‌های مختلفی برای برآورد مناسب پارامتر منظم‌سازی در مسائل وارون‌سازی خطی داده‌های ژئوفیزیکی ارائه شده است که مطلوب بودن آن تابع شرایط خاص آن مساله است (Hansen, 2010). بائر و لوکاس (Bauer and Lukas, 2011) در یک تحقیق جامع، غالب روش‌های برآورد پارامتر منظم‌سازی را بررسی کردند و نشان دادند که مقایسه هر یک از روش‌ها کار ساده‌ای نیست و نمی‌توان انتظار داشت که در صورت مناسب بودن یک روش منظم‌سازی برای یک مساله بد وضع خاص، این روش برای تمامی مسائل بد وضع مناسب باشد. روش‌های انتخاب پارامتر منظم‌سازی باید برای هر مساله بد وضع خاص به صورت مجزا مورد مطالعه قرار گیرند و پارامتر-های مربوطه با توجه به طبیعت آن مساله بد وضع تنظیم گردد. تحقیق-های متعددی در طی دهه‌های اخیر برای انتخاب مناسب پارامتر منظم‌سازی در مسائل وارون‌سازی ژئوفیزیکی انجام گرفته است. روش‌های منحنی L و GCV به ترتیب توسط Li and Oldenburg (1999) و Walker (1999) برای برآورد پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی داده‌های مقاومت‌ویژه و الکترومغناطیس مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از این بررسی نشان دهنده ایجاد ساختارهای اضافه در تکرارهای اولیه بود که در تکرارهای بعدی حذف آن‌ها زمان‌بر است. روش "اعتبارسنجی تقاطعی تعمیم یافته" در حل مساله وارون غیرخطی گوس- نیوتن (توسط Haber and Oldenburg (2000) برای وارون‌سازی داده‌های گرانی سنجی و مگنتوتلوریک در یک مثال مصنوعی بکار گرفته شد. پس از معرفی روش متعادل‌سازی قید فعال[3] توسط Yi et al., (2003)، این روش در وارون‌سازی دو بعدی هموار داده‌های مگنتوتلوریک مورد استفاده قرار گرفت (Lee et al., 2009). بر طبق نتایج آن‌ها، مقدار مناسب برای پارامتر منظم‌سازی در محدوده بین بیش‌ترین و کمترین مقدار در هر اجرا تعیین می‌گردد که می‌تواند منجر به همگرایی نتایج در تعداد تکرار کمتری باشد. Farquharson and Oldenburg (2004) روش‌های اصل نبود انطباق، منحنی L و GCV را در وارون‌سازی داده‌های الکترومغناطیس مقایسه کردند نتایج حاکی از موثرتر بودن روش اصل نبود انطباق در یک بازه جستجوی مناسب، در صورت مشخص بودن سطح نوفه در داده‌ها است. از معایب این روش، کاهش بازده محاسباتی آن در مواجهه با مسائل با حجم زیاد از نظر تعداد داده و پارامترهای مدل است. همچنین روش منحنی L دارای توانایی بالاتری نسبت به روش GCV می‌باشد اما از نظر سرعت محاسباتی کندتر است. Oldenburg and Li, (2005) از روش‌های اعتبارسنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV)، اصل نبود انطباق (DP) و منحنی L برای مشخص کردن مقدار پارامتر منظم‌سازی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل استفاده کردند. نتایج این بررسی نشان داد که روش GCV قادر است مقدار مناسب پارامتر منظم‌سازی را تا حد ایده‌الی به دست آورد و سطح نوفه موجود در داده‌ها را تخمین بزند. وطن‌خواه و همکاران (۲۰۱۴) روش‌های اصل χ^2 و تخمینگر ناریب ریسک احتمالی[4] را در وارون‌سازی متمرکز داده‌های گرانی استفاده کردند. آنها برای حل مساله وارون از روش‌های مستقیم بر پایه روش SVD استفاده نمودند. نتایج نشان دهنده افزایش سرعت انجام وارون‌سازی متمرکز داده‌های گرانی بود. قائدرحمتی و همکاران (۱۳۹۴) به بهبود و مقایسه انتخاب پارامتر منظم‌سازی با استفاده از روش‌های GCV تعمیم یافته، منحنی L و مقایسه آن‌ها با روش ACB پرداختند، نتایج آن‌ها نشان دهنده مناسب بودن روش GCV تعمیم یافته نسبت به روش‌های مورد بررسی می‌باشد. رضایی و همکاران (۱۳۹۴) نیز روش تخمینگر ناریب ریسک احتمال (UPRE)که توسط Vogel در سال ۲۰۰۲ معرفی شده است را در وارون‌سازی سه بعدی مقید داده‌های مغناطیسی بکار گرفتند. در تحقیق پیشرو، به مدل‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک بر مبنای روش دو قطری سازی لنکزوس و انتخاب پارامتر منظم‌سازی با روش منظم‌سازی انطباقی و مقایسه آن با روش‌های GCV تعمیم یافته و ACB در مثال مصنوعی و داده‌های واقعی خواهیم پرداخت. برای مقایسه مزایا و معایب روش‌های

1-Ill-posed
2-Hadamard
3-Active Constraint Balancing
4-Unbiased Predictive Risk Estimator (UPRE)

مذکور عواملی چون حداکثر دقت روش، اتوماتیک بودن، نیاز به طرح کنترلی، نیاز به اطلاعات اولیه مثل سطح نوفه داده‌ها، بار محاسباتی هر روش و زمان لازم برای محاسبات کل روند وارون‌سازی مد نظر قرار خواهد گرفت.

۲- تئوری

۲-۱- مساله وارون مگنتوتلوریک

از مشکلات عمده در وارون‌سازی مسائل مگنتوتلوریک، عدم یکتایی در جواب وارون‌سازی و بدحالت بودن آن است (Li and Oldenburg, 1988). به این منظور از تئوری تیخونوف برای منظم‌سازی مسائل وارون استفاده می‌شود (Tikhonov and Arsenin, 1977):

$$\varphi(m) = \|d_{obs} - Gm\|_2^2 + \lambda\|m - m_0\|_2^2 \quad (۲)$$

که d بردار داده‌ها، $G(m)$ تابع پیشرو، λ پارامتر منظم‌سازی، m بردار پارامترهای مدل و m_0 مدل مرجع است. با کمینه کردن تابع هدف، می‌توان پارامترهای مدل را از رابطه زیر به دست آورد:

$$m_\lambda = \arg(min\{\|d_{obs} - Gm\|_2^2 + \lambda\|\Delta m\|_2^2\}) \quad (۳)$$

که در آن m_λ پارامترهای مدل تخمین زده شده است، $\|d_{obs} - Gm\|_2^2$ تابع عدم برازش داده بوده و $\|\Delta m\|_2^2$ تابع منظم‌ساز تیخونوف است. پارامتر λ پارامتر منظم‌سازی است ($\lambda > 0$). در نهایت پارامترهای مدل از حل معادله زیر محاسبه می‌شود (Aster et al., 2013).

$$m_\lambda = (G^TG + \lambda I)^{-1}G^Td_{obs} \quad (۴)$$

۲-۲- روش GCV تعمیم یافته

روش اعتبارسنجی متقابل (GCV) یک روش رایج برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی بهینه می‌باشد (Wahba, 1990). در این روش پاسخ مناسب برای یک مساله وارون، پاسخی است که بی‌دلیل حساس به هیچ داده‌ای نیست. در واقع مدل به دست آمده از حل مساله وارون می‌تواند داده‌ای را تخمین بزند که برای محاسبه مدل بکار نرفته است. از این رو این روش به روش اعتبارسنجی معروف شده است. بنابراین مقدار بهینه انتخاب شده برای پارامتر منظم‌سازی قادر است تمامی داده‌ها را از طریق مدل به دست آمده از حل مساله وارون تخمین بزند. پس از خطی سازی مسائل وارون غیرخطی که غالباً از طریق روش‌های تکرار حل می‌گردند (رابطه (۲))، روش GCV را در هر تکرار وارون‌سازی می‌توان به کار گرفت. براساس روابط (۲) و (۳)، روش GCV برای یک مساله وارون به صورت زیر خواهد بود (Farquharson and Oldenburg, 2004):

$$\mathrm{GCV}(\lambda) = \frac{\|d(\lambda) - d_{obs}\|^2}{[\mathrm{trace}(\mathrm{I} - \mathrm{C}(\lambda)]^2} \quad (۵)$$

که در آن

$$\mathrm{C}(\lambda) = \mathrm{G}(G^TG + \lambda I_n)^{-1}G^T \quad (۶)$$

trace بیان‌کننده مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس و I ماتریس همانی است. C به عنوان یک پارامتر تثبیت کننده در یک روش عمل می‌کند؛ که منجر به افزایش پایداری روش می‌گردد از این رو به روش GCV تعمیم یافته معروف است (Vio et al., 2004; Bauer and Lukas, 2011). در این روش با کمینه کردن تابع GCV (رابطه (۵))، مقدار بهینه پارامتر منظم‌سازی به دست می‌آید. باوئر و لوکاس (۲۰۱۱)، مقدار پارامتر تثبیت کننده را $c = 3$ انتخاب کردند. برآورد انجام شده برای پارامتر منظم‌سازی براساس این روش در تکرارهای نخستین به مقدار نهایی آن نزدیک است، اما بکار گیری این تخمین‌ها، منجر به پدیدار شدن ساختارهایی اضافی در مدل نهایی می‌گردد (Walker, 1999).

۲-۳- روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB)

این روش توسط Yi و همکاران در سال ۲۰۰۳ مطرح گردید و در وارون‌سازی دو بعدی داده‌های مگنتوتلوریک بکار گرفته شد (Lee et al., 2009). اساس این روش بر پایه تعریف پارامتر منظم‌سازی به صورت یک تابع فضایی $\lambda(x,z)$ است که در آن پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار فرآیند وارون متغیر است و از طریق تحلیل تباین پارامتری تخمین زده می‌شود. در واقع الگوریتم متعادل‌ساز قید فعال در فرآیند وارون‌سازی، برای دستیابی به یک قید هموارسازی بهینه اجرا می‌شود. پارامتر منظم-سازی بهینه از طریق تابع تفکیک‌پذیری (Spread function)، SP_i برای i امین پارامتر مدل محاسبه می‌شود که این پارامتر توسط ماتریس تحلیل پارامتر R (Parameter Resolution Matrix) به صورت زیر تعریف می‌شود (Menke, 1989).

$$\mathrm{SP_i} = \sum_{j=1}^{N}(\mathrm{w_{ij}}(1 - \mathrm{S_{ij}})\mathrm{R_{ij}})^2 \quad (۷)$$

که در آن N تعداد پارامترهای مدل، w_{ij} ضریب وزنی که از طریق فاصله فضایی بین i امین و j امین پارامتر محاسبه می‌شود، S_{ij} ماتریسی برای اعمال قیدهای منظم‌سازی در فرآیند وارون روی i امین پارامتر و R نیز ماتریس حساسیت است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{R} = (\mathrm{G^TG} + \lambda \mathrm{C}^T\mathrm{C})^{-1}\mathrm{G^TG} \quad (۸)$$

C عملگر هموارساز لاپلاسین مرتبه دوم است. در این روش ضرایب لاگرانژ از طریق درون‌یابی خطی در فضای لگاریتمی و مابین دو مقدار کمینه و بیشینه تعیین می‌گردد. تابع زیر ضریب لاگرانژ را بر مبنای تابع تفکیک پذیری تخصیص می‌دهد (Yi et al., 2003).

$$\begin{aligned}&\log(\lambda_\mathrm{i}) \\ &= \log(\lambda_{\min}) + \frac{\log(\lambda_{\max}) - \log(\lambda_{\min})}{\log(\mathrm{SP_{max}}) - \log(\mathrm{SP_{min}})}\{\log(\mathrm{SP_i}) \\ &- \log(\mathrm{SP_{min}})\}\end{aligned} \quad (۹)$$

λ_i ضریب لاگرانژ برای پارامتر i، SP_i تابع تفکیک‌پذیری پارامتر i، $SP_{\min}$ و $SP_{\max}$ به ترتیب کمترین و بیشترین مقادیر تابع تفکیک پذیری و $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب مقادیر کم و زیاد برای ضریب لاگرانژ هستند که توسط کاربر انتخاب می‌شوند.

۲-۴- روش منظم‌سازی انطباقی

روش منظم‌سازی انطباقی توسط Zhdanov, (2002) معرفی گردید و بر پایه ایجاد تعادل بین تابع تثبیت کننده $\varphi(m)$ و عدم برازش داده $\varphi(d)$ عمل می‌کند. مطابق روش Zhdanov، اولین تکرار وارون‌سازی بدون در نظر گرفتن پارامتر منظم‌سازی اجرا می‌شود ($\lambda_0 = 0$). پس از

اولین تکرار، مقدار پارامتر منظم‌سازی، λ_1، به صورت زیر محاسبه می‌شود (Zhdanov, 2002):

$$\lambda_1 = \frac{\|Gm_1 - d_{obs}\|_2^2}{\|m_1\|_2^2} \qquad (۱۰)$$

در این روش از تکراری تا تکرار بعدی، افزایشی در نرم مدل می‌تواند رخ دهد. از این رو برای همگرایی سریع، ضریب کاهشی برای پارامتر منظم‌سازی متناسب با افزایش عملکرد نرم مدل پیشنهاد شده است (Zhdanov, 2002):

$$\lambda_k = \lambda_1 q^{k-1} \; ; \; k = 1,2,3,\dots,n \; ; \; 0 < q < 1 \qquad (۱۱)$$

k تعداد تکرار، λ_k پارامتر منظم‌سازی مرتبه k ام و ضریب q میزان کاهش پارامتر منظم‌سازی را تعیین می‌کند. این ضریب به صورت تجربی انتخاب می‌شود. طبق معادله (۱۰)، تا زمانی که حداکثر تعداد تکرارها یا شرایط مناسب برای عدم برازش داده در هر تکرار وارون‌سازی به دست آید، پارامتر منظم‌سازی مطلوب، λ_k، به صورت پیوسته کاهش خواهد یافت. در این روش، توصیه می‌شود از تعداد بهینه تکرارها استفاده شود، زیرا مقدار تخمین زده شده برای پارامتر منظم‌سازی در هر تکرار بسیار کوچک خواهد بود که می‌تواند منجر به راه‌حل‌های نادرست و ناپایدار شود. با این وجود، با تعیین قید مناسب برای هر بار تکرار در فرآیند وارون‌سازی، از جمله اعمال محدودیت‌های معین برای میزان کاهش عدم برازش داده این مشکل رفع خواهد شد (Zhdanov, 2002).

۲-۵- وارون‌سازی براساس روش دو قطری سازی لنکزوس

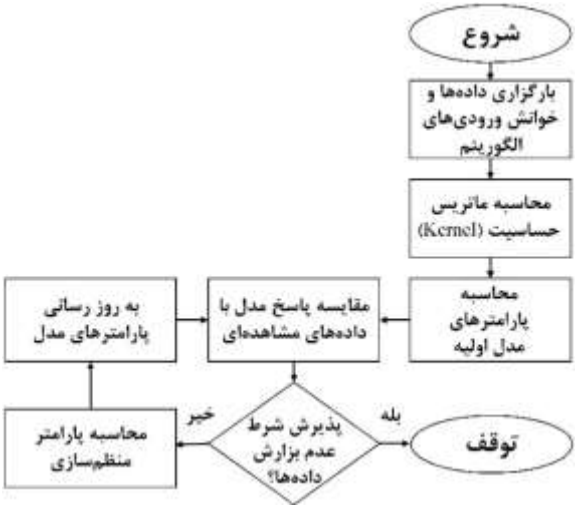
روش دو قطری سازی لنکزوس، الگوریتمی براساس روش‌های حل تکراری است که با انتقال سیستم معادلات به زیر فضایی با ابعاد کمتر (زیر فضای کریلف K_k)، سرعت اجرای الگوریتم و حل مساله وارون را افزایش می‌دهد (Abedi et al., 2013 ؛ رضایی و همکاران، ۱۳۹۴). در صورتی که سیستم معادلات به صورت کلی رابطه (۴) باشد، بردار پارامترهای مدل قابل دستیابی از رابطه زیر خواهد بود:

$$\rho = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T d^{obs} \qquad (۱۲)$$

حل مساله وارون براساس ماتریس ژاکوبینی با ویژگی‌های دو قطری بودن و ابعادی کوچک‌تر نسبت به ماتریس ژاکوبین اصلی منجر به کاهش میزان فضای ذخیره‌سازی حافظه رایانه و زمان مدل‌سازی وارون و در نتیجه افزایش سرعت اجرای الگوریتم خواهد شد. روش دو قطری سازی لنکزوس روشی ایده‌آل در تخمین پارامترهای مدل در مسائلی است که تعداد پارامترهای مدل بیشتر از تعداد داده‌ها می‌باشد و به اصلاح مساله فرو برآورد است. با کمینه کردن نرم ۲ رابطه عدم برازش داده $(min\|G\rho - d\|_2^2)$ می‌توان رابطه $d = G\rho$ را حل نمود. بنابراین جواب ρ را می‌توان با اعمال n مرتبه تکرار الگوریتم وارون‌سازی به روش دو قطری‌سازی لنکزوس به دست آورد (Paige and Saunders, 1982). مساله حداقل مربعات در رابطه (۳) نیز، با بکارگیری الگوریتم دو قطری‌سازی لنکزوس را می‌توان به صورت زیر حل نمود:

$$min \left\| \begin{bmatrix} G \\ \sqrt{\lambda} L \end{bmatrix} \rho - \begin{bmatrix} d^{obs} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \qquad (۱۳)$$

و جواب مساله وارون را به دست آورد. در شکل (۱) روند ساده شده از فرآیند وارون‌سازی نمایش داده شده است.



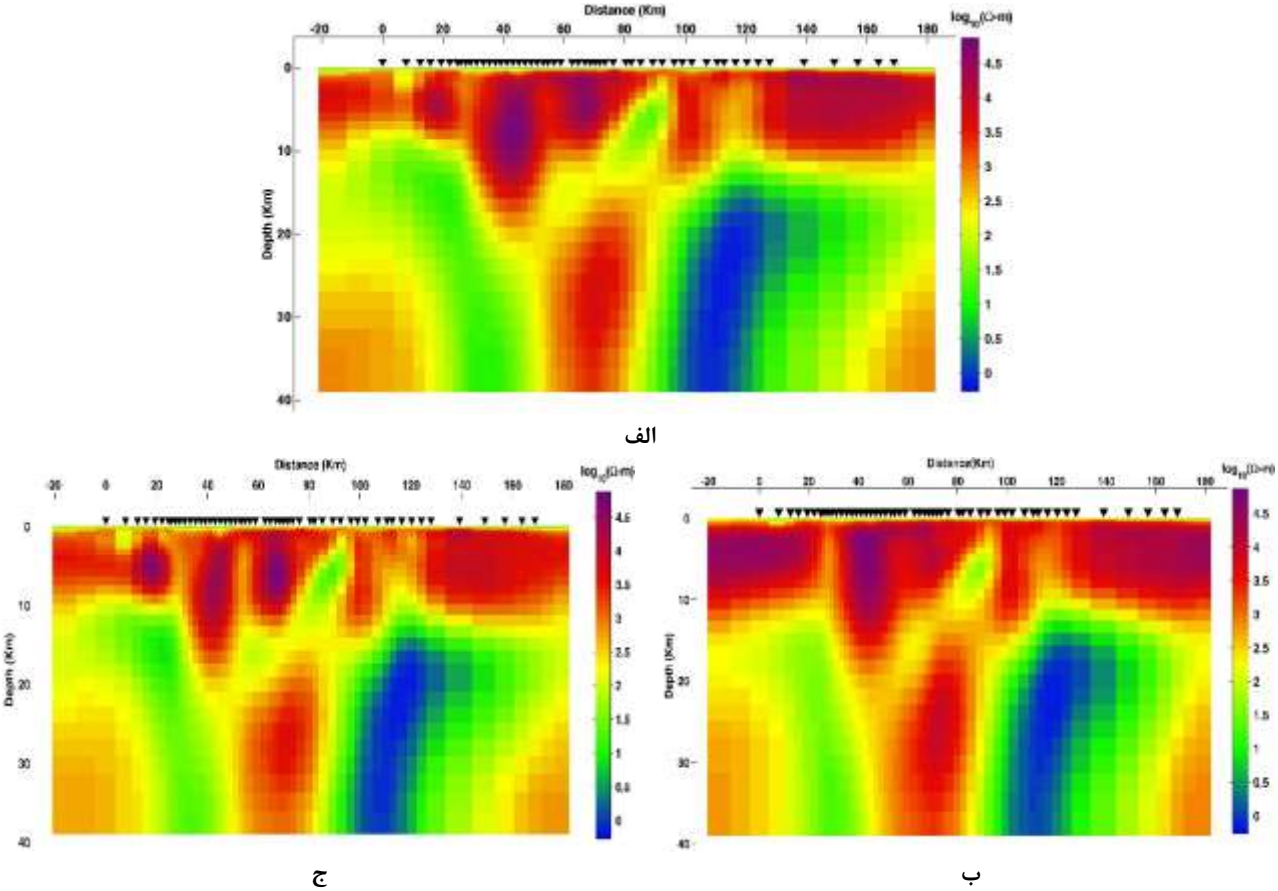
شکل (۱): نمودار شماتیکی از فرآیند الگوریتم وارون‌سازی.

۳- ارزیابی مدل‌سازی وارون

۳-۱- مدل مصنوعی

توانایی روش‌های مذکور در انتخاب مناسب پارامتر منظم‌سازی از طریق کد نویسی در محیط متلب و مبتنی بر الگوریتم دوقطری سازی لنکزوس در کدهای الگوریتم لی و همکاران (۲۰۰۹) و با انجام تغییراتی در قسمت nlsqupdate.m و nlsqinv2d.m انجام گردید این دو تابع به ترتیب نقش مهمی را در به روز رسانی پارامترهای مدل در هر تکرار و هسته محاسباتی در فرآیند وارون‌سازی ایفا می‌کنند. در ادامه، وارون‌سازی دو بعدی داده‌های مگنتوتلوریک در یک مثال مصنوعی با حجم بزرگ به لحاظ تعداد داده‌ها، پارامترهای مدل و تعداد فرکانس‌های انتخابی بررسی می‌شود. نتایج نهایی به دست آمده از روش‌های مختلف، با نتایج وارون‌سازی حاصل از روش منظم‌سازی انطباقی مقایسه خواهند شد. داده‌های منطقه لچند استرالیا به عنوان مدل مصنوعی انتخاب شده است که مدل‌سازی آن قبلا توسط نرم‌افزارهای مختلف انجام شده است (Lee et al., 2009). این مدل به دلیل حجم بالای داده‌ها به لحاظ تعداد ایستگاه‌ها و فرکانس‌های نمونه‌برداری یک مدل تقریبا ایده‌آل برای وارون‌سازی مساله در حجم بزرگ و بررسی تاثیر روش‌های مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی می‌باشد. داده‌های برداشت شده در منطقه‌ای با رسوبات دریایی، چرت‌ها و سنگ‌های آتش‌فشانی بازیک با سن پالئوزوئیک می‌باشد. اندازه‌گیری داده‌های MT در یک پروفیل به طول ۱۸۰ کیلومتر با آزیموت ۹۵ درجه عمود بر امتداد ساختارها در ۵۳ ایستگاه برداشت شده است. تعداد فرکانس‌های نمونه‌برداری ۲۷ فرکانس در بازه ۰/۰۰۹۲ تا ۶۶ هرتز می‌باشد. با در نظر گرفتن حجم بالای پارامترهای مدل $(5724 = 4 \times 27 \times 53)$ برای هر دو مد (TE+TM) استفاده از الگوریتم دوقطری سازی لنکزوس (LB) به عنوان الگوریتمی سریع و کارآمد برای مدل‌سازی وارون داده‌ها ضروری می‌باشد. با ایجاد یک شبکه‌بندی مناسب، مدل‌سازی پیشرو از طریق روش المان محدود (FE) طبق روش ارائه شده توسط Rodi (1979) انجام شده است (Lee et al., 2009). نتایج به دست آمده از روش‌های مختلف انتخاب پارامتر

منظم‌سازی در شکل (۲) و جدول (۱) نشان داده شده است. همچنین در شکل (۳) پاسخ نظری مقاومت‌ویژه ظاهری و فاز این مدل‌ها با داده‌های مشاهده‌ای مقایسه شده است.



شکل (۲): مدل‌های حاصل از وارون‌سازی دوبعدی داده‌های مقاومت‌ویژه ظاهری و فاز مدل مصنوعی منطقه لچلند استرالیا برمبنای الگوریتم دوقطری سازی لنکزوس، الف – مدل وارون‌سازی شده بر اساس روش ACB (RMS = 0.203%)، ب – مدل به دست آمده از روش GCV تعمیم یافته (RMS = 0.167%)، ج – مدل به دست آمده از روش منظم‌سازی انطباقی (RMS = 0.145%).

با توجه به شکل (۲)، هر سه مدل به دست آمده، تطابق و مشابهت نسبتا یکسانی با یکدیگر دارند و به خوبی مناطق با مقاومت‌ویژه‌های زیاد و کم را شناسایی کرده‌اند. تفاوت اساسی در مدل‌های به دست آمده، مربوط به شناسایی دقیق مرزهای آنومالی می‌باشد که در روش منظم‌سازی انطباقی این امر به خوبی مشخص شده است و بیانگر دقت بالای این روش می‌باشد. همچنین بیش‌ترین میزان تطابق و کمترین خطای مدل‌سازی نیز مربوط به روش منظم‌سازی انطباقی می‌باشد که با توجه به پارامترهای، میزان حافظه مورد نیاز، زمان لازم برای انجام مدل‌سازی و همگرایی به جواب مطلوب در تکرارهای کمتر براساس نتایج جدول (۱) را دارا می‌باشد.

جدول (۱): مقایسه روش‌های مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی بر مبنای الگوریتم دوقطری‌سازی لنکزوس

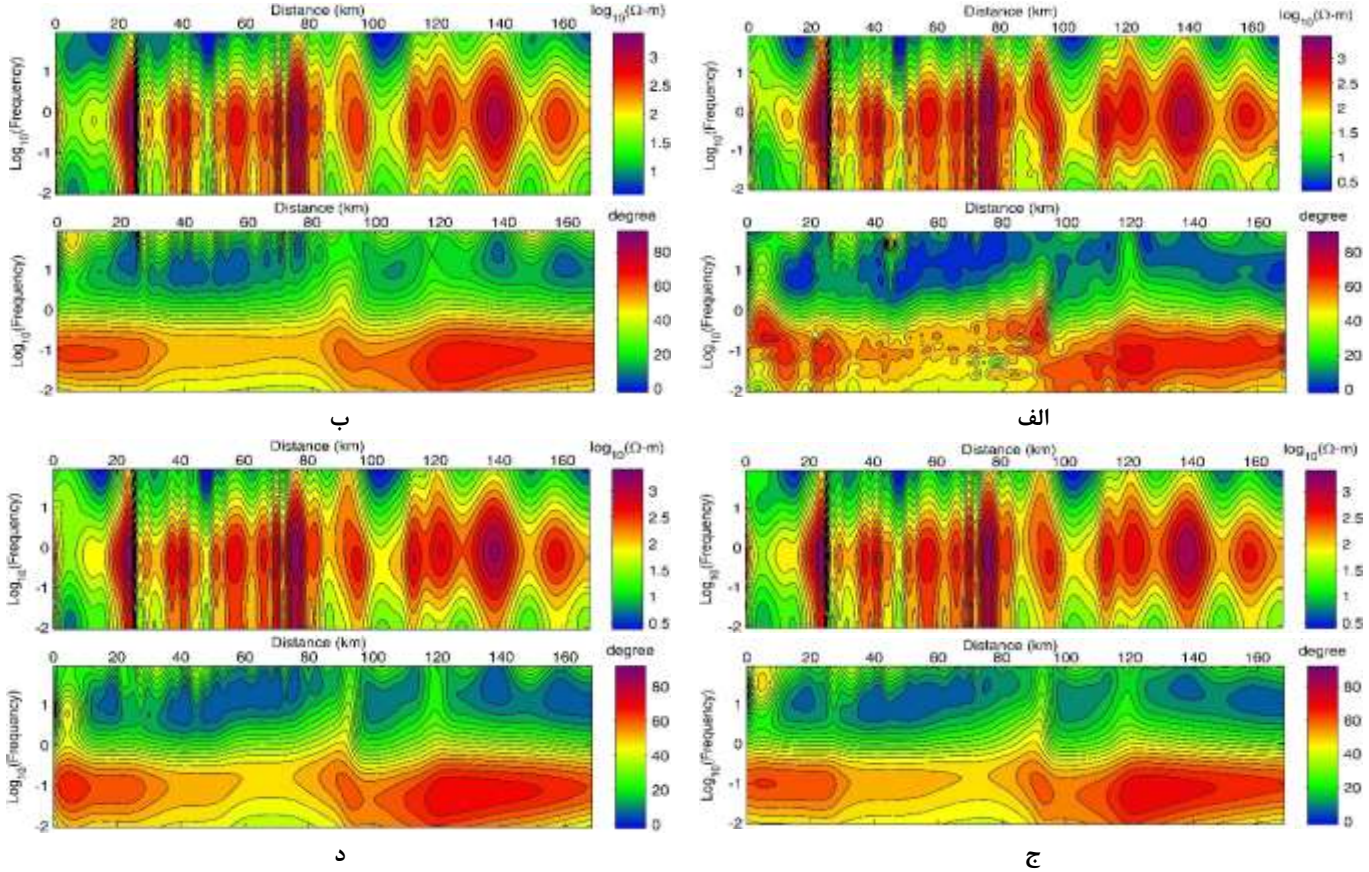
روش‌ها	زمان سپری شده (ثانیه)	میزان حافظه لازم (Mb)	تعداد تکرارهای بهینه	خطای RMS
متعادل‌سازی قید فعال (ACB)	۱۷۱۸،۵	۱۱۸،۹	۱۱	٪ ۰،۲۰۳
GCV تعمیم یافته	۲۱۸۵،۵	۱۶۱،۲	۱۳	٪ ۰،۱۶۷
منظم‌سازی انطباقی	۹۲۳،۸	۸۸،۹	۸	٪ ۰،۱۴۵

تعداد تکرارهای بهینه در این مقایسه براساس دستیابی به مقداری ثابتی به عنوان کمترین مقدار تابع عدم برازش داده (شرط کنترلی) در همه روش‌ها منظور شده است. با توجه به نتایج جدول (۱)، روش GCV تعمیم یافته دارای بیش‌ترین میزان زمان و حافظه لازم برای انجام مدل‌سازی است که این امر به دلیل بررسی مقادیر مختلفی از پارامتر منظم سازی و حل محاسبات متعدد پیشرو در جهت کمینه کردن تابع، به ازای هر تکرار مساله وارون در یک محدوده جستجوی بزرگ و یافتن مقداری بهینه است. در روش ACB نیز، همانند روش GCV تعمیم یافته برای هر مقدار انتخابی پارامتر منظم‌سازی در بازه بین کمترین و بیشترین مقادیر که توسط کاربر انتخاب شده است، محاسبات پیشرو در هر تکرار انجام می‌شود در نتیجه در وارون‌سازی داده‌های در حجم بزرگ و داده‌های سه بعدی مگنتوتلوریک میزان زمان و حافظه به نسبت بیشتری نیاز خواهیم داشت. لازم به ذکر است که در روش‌های مذکور، محدوده جستجوی پارامتر منظم‌سازی تأثیر به سزایی در بازدهی محاسباتی روش‌ها خواهد داشت. روش منظم‌سازی انطباقی با محاسبه نسبت توابع عدم برازش داده به نرم مدل در هر تکرار و کمینه کردن تابع

هدف، به انتخاب بهینه پارامتر منظم سازی اقدام می‌کند و در نتیجه کمترین زمان برای دستیابی به مقداری مناسب صرف خواهد شد. لذا بر طبق نتایج جدول (۱)، روش منظم‌سازی انطباقی به عنوان سریع‌ترین روش با حداکثر میزان دقت لازم در شناسایی مرزها برای وارون‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک دو بعدی در حجم بزرگ و داده‌های سه بعدی پیشنهاد می‌شود.

۳-۲- داده‌های مگنتوتلوریک سبلان

آزمایش‌های وارون‌سازی و بررسی روش‌های انتخاب پارامتر منظم‌سازی برای یک دسته داده واقعی مگنتوتلوریک در منطقه بوشلی (نیر) انجام شده است. این منطقه در شمال غرب ایران و در استان اردبیل و جنوب غربی شهر نیر قرار دارد. محدوده مورد نظر در بخشی از بلوک قفقاز و ایران قرار دارد که از جهات مختلف تحت تاثیر تنش‌ها و دگرشکلی‌های ناشی از حرکات زمین ساختی حاکم بر این منطقه در رخداد تکتونیکی آلپی است. در یک نگاه کلی می‌توان این منطقه را بخشی از کناره بلوک قاره‌ای تصور نمود که دست‌خوش پویایی تکتونو - ماگمایی نئوژن کواترنر شده است.



شکل (۳): مقایسه شبه مقاطع داده‌های مقاومت‌ویژه ظاهری و فاز مشاهده‌ای (الف) منطقه لچلند استرالیا بر مبنای الگوریتم دوقطری سازی لنکزوس و پاسخ مدل حاصل از وارون‌سازی دو بعدی با بکارگیری روش‌های ACB (ب)، GCV تعمیم یافته (ج) و منظم سازی انطباقی (د).

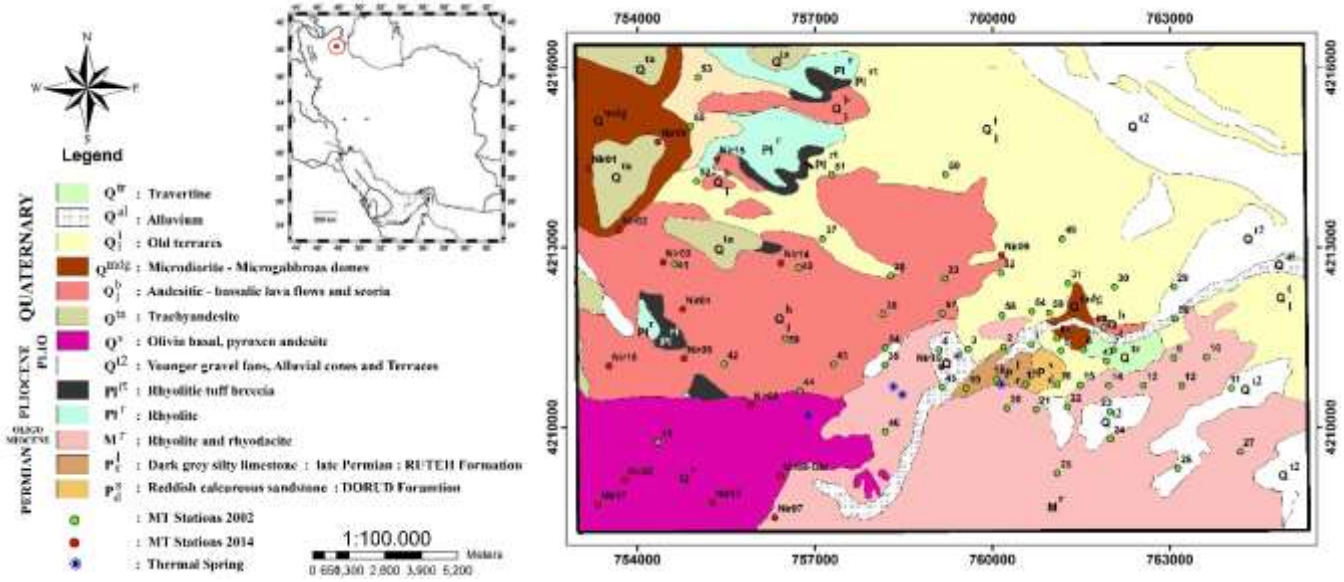
فرآیندهای این پدیده به صورت ماگماتیسم آتش‌فشانی نئوژن کواترنر بروز کرده است؛ که تشکیل سیستم‌های زمین گرمایی نیز مرتبط باهمین رخداد است. در مقیاس ناحیه‌ای، محدوده جزئی از کناره فرو افتاده سیستم سبلان به حساب می‌آید که سیستم ساختار حلقوی بالیخلوچای - قره‌سو و تلخه زرد در آن جریان دارد. این سیستم خود می‌تواند فرآیند پویایی ساختمانی خطواره‌ها و ساختارهایی باشد که اصولاً سیستم آتش‌فشانی سبلان را تحت کنترل دارد. منطقه متشکل از یک مجموعه سیستم‌های هورست و گرابن بوده که در آن هورست‌ها محل صعود و نفوذ توده‌های ماگمایی بوده و گرابن‌ها محل انباشته شدن رسوبات تخریبی در آن‌ها شده است؛ به نحوی که بر پایه صفات گرانی سنجی توده سبلان و قصر داغ ناهنجاری مثبت دارند حال آنکه منطقه جنوبی باختری اردبیل فرو افتادگی با ناهنجاری منفی است که مرکز آن آبگرم سرعین است.

آنچه مسلم است ضرورت تشکیل میدان زمین گرمایی وجود کانون حرارتی گرم در ژرفا، معبر و مسیر حرکتی مناسب برای انتقال و انباشت آبگرم (مخزن مناسب) و در نهایت وجود پوشش مناسب جهت حفظ مخزن میدان زمین گرمایی است. در منطقه مورد مطالعه سازندهای مناسبی برای ایجاد سنگ مخزن و پوشش سنگ وجود دارد مثل سازندهای کربناته پرمین - تریاس و پوشش شیلی سازند کرج، و از طرفی کانون حرارتی مرتبط با هر یک از سیستم‌های ماگماتوژن می‌باشد که به هر روی انواع جوان‌تر شرایط و قدرت مناسب‌تر دارند و از اهمیت بالاتری برخوردارند و در منطقه سبلان، سیستم آتش‌فشانی سبلان جوان‌تر و از نظر پتروژنز مناسب‌ترین سیستمی است که می‌تواند حرارت مناسب را

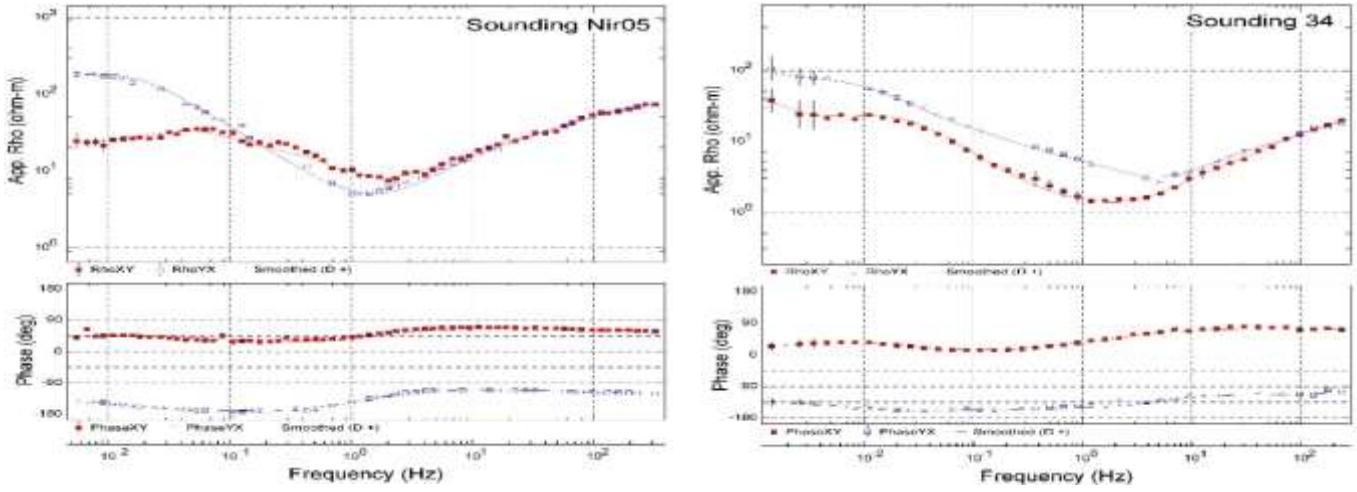
تولید نماید حال آنکه سیستم قره داغ به واسطه سرشت بازالتی علیرغم جوان بودن، محتملاً از ژرفای بیشتری نشئت گرفته است. سیستم ولکانو - پلوتونی نیر - زرج آباد چندان جوان نبوده و به واسطه کهولت فاقد منطقه مناسب است؛ لذا می‌توان نتیجه گرفت که سیستم زمین گرمایی کنونی در گرو فرآیند پویای ماگمایی سبلان است؛ که توانسته کانون داغی را به وجود آورده باشد. سیستم‌های زمین گرمایی بوشلی و سرعین عموماً در فرو افتادگی ساختاری اردبیل - نیر است؛ که از کانون ماگمایی سبلان فاصله دارد، اما جایگاهی است که می‌تواند میزبان ذخایری از آب-های داغ در ژرفای منطقه باشد (کاوشگران، ۱۳۷۵). نقشه ساختارهای زمین‌شناسی بوشلی به همراه موقعیت ایستگاه‌ها و چشمه‌های آبگرم در شکل (۴) نشان داده شده است.

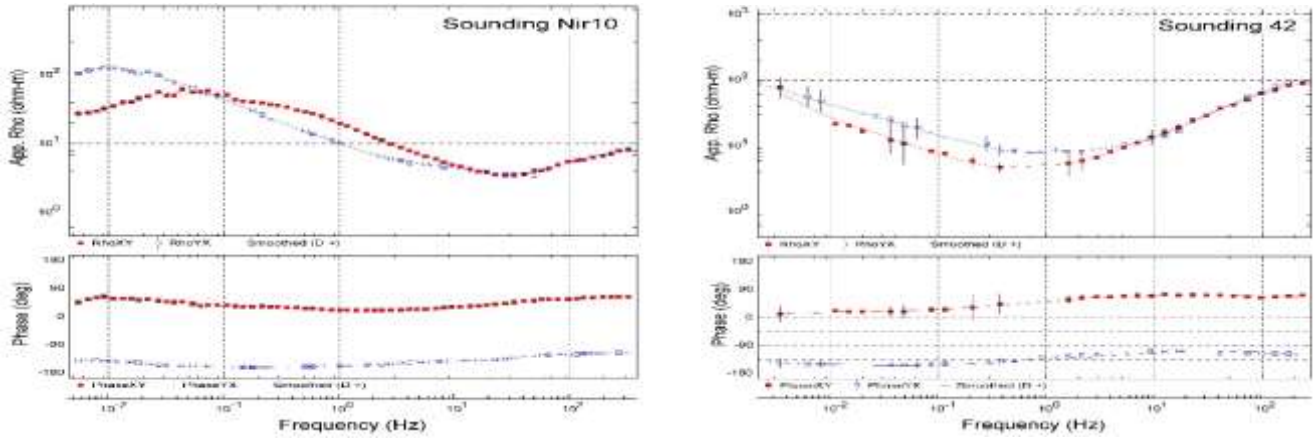
برداشت داده‌های مگنتوتلوریک برای شناسایی مخزن زمین گرمایی در منطقه بوشلی در دو مرحله انجام شده است. در مرحله نخست ۶۰ ایستگاه MT در سال ۱۳۸۱ با دستگاه Metronix GMS05 (گویا، ۱۳۸۱) و در مرحله دوم ۲۱ ایستگاه MT در سال ۱۳۹۳ با دستگاه Phoenix MTU-5A برداشت شده است (مرادزاده، ۱۳۹۳). همچنین پردازش داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SSMT2000 صورت گرفته است. برای شناسایی مخزن زمین گرمایی در دامنه عمقی مناسب، تانسورهای امپدانس در ۳۶ فرکانس در محدوده ۰،۰۰۸۲۵ تا ۲۳۷ هرتز اندازه‌گیری شده است. شکل (۵) مقاومت ظاهری و منحنی فاز چهار ایستگاه MT را در حالت TE و TM برای داده‌های میدانی نشان می‌دهد.

داده‌های ۱۲ ایستگاه MT در طول پروفیل انتخابی (P7) از منطقه مورد مطالعه برای وارون‌سازی دو بعدی در شکل (۶) نشان داده شده است (زینال‌پور و همکاران، ۱۳۹۳). نتایج حاصل از بکارگیری روش‌های مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی به همراه استفاده از روش دو قطری‌سازی لنکزوس به منظور تسریع روند وارون‌سازی در شکل (۷) آمده است. همچنین در شکل (۸)، شبه مقاطع داده‌های مقاومت‌ویژه ظاهری و فاز این مدل‌ها با داده‌های مشاهده‌ای منطقه مقایسه شده است.

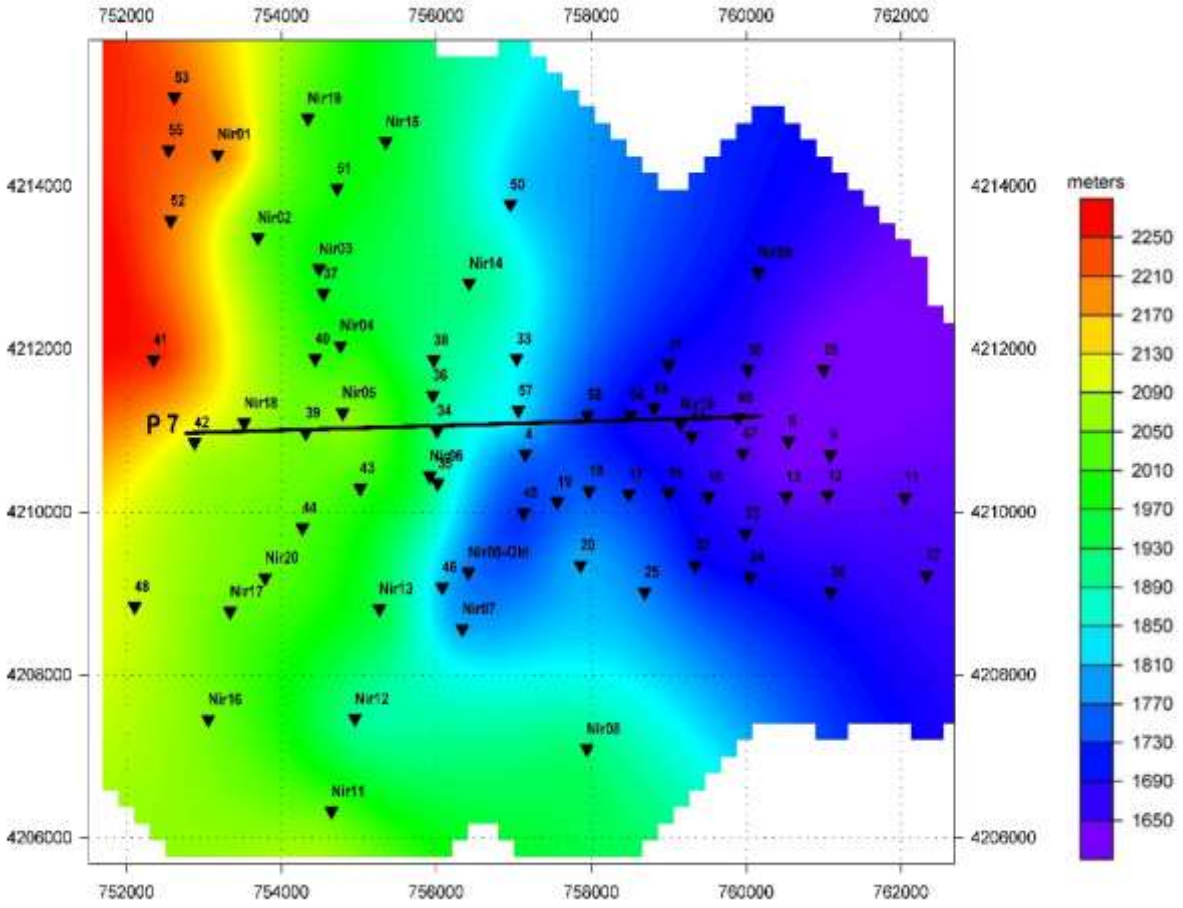


شکل (۴): موقعیت جغرافیایی و نقشه زمین‌شناسی منطقه بوشلی به همراه محل چشمه‌های آب گرم و ایستگاه‌های MT.

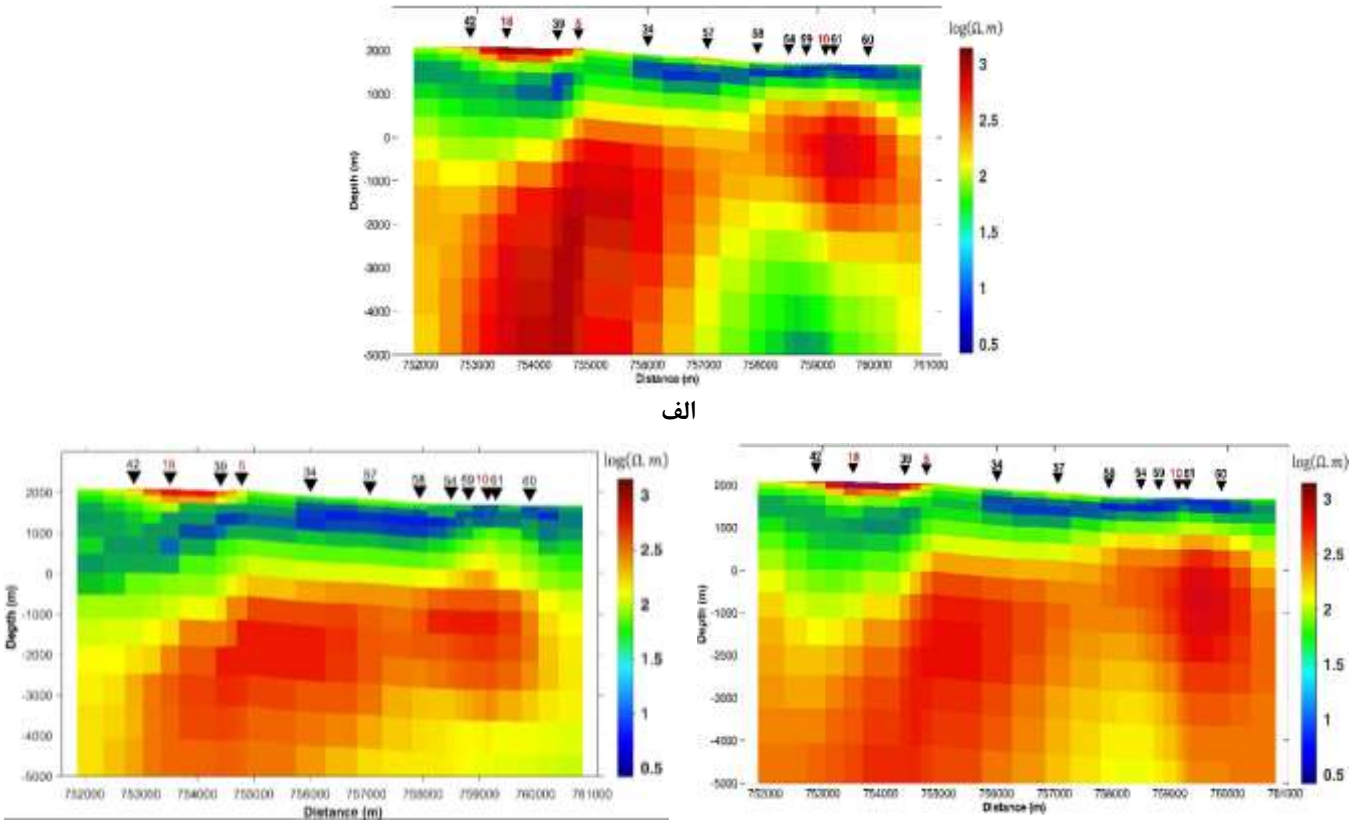




شکل (۵): منحنی‌های مقاومت‌ویژه و فاز برای ۴ ایستگاه MT در حالت‌های TE و TM منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر).



شکل (۶): نقشه توپوگرافی و توزیع ایستگاه‌های MT و در منطقه جنوب سبلان (بوشلی)، استان اردبیل (WingLink, 2003).



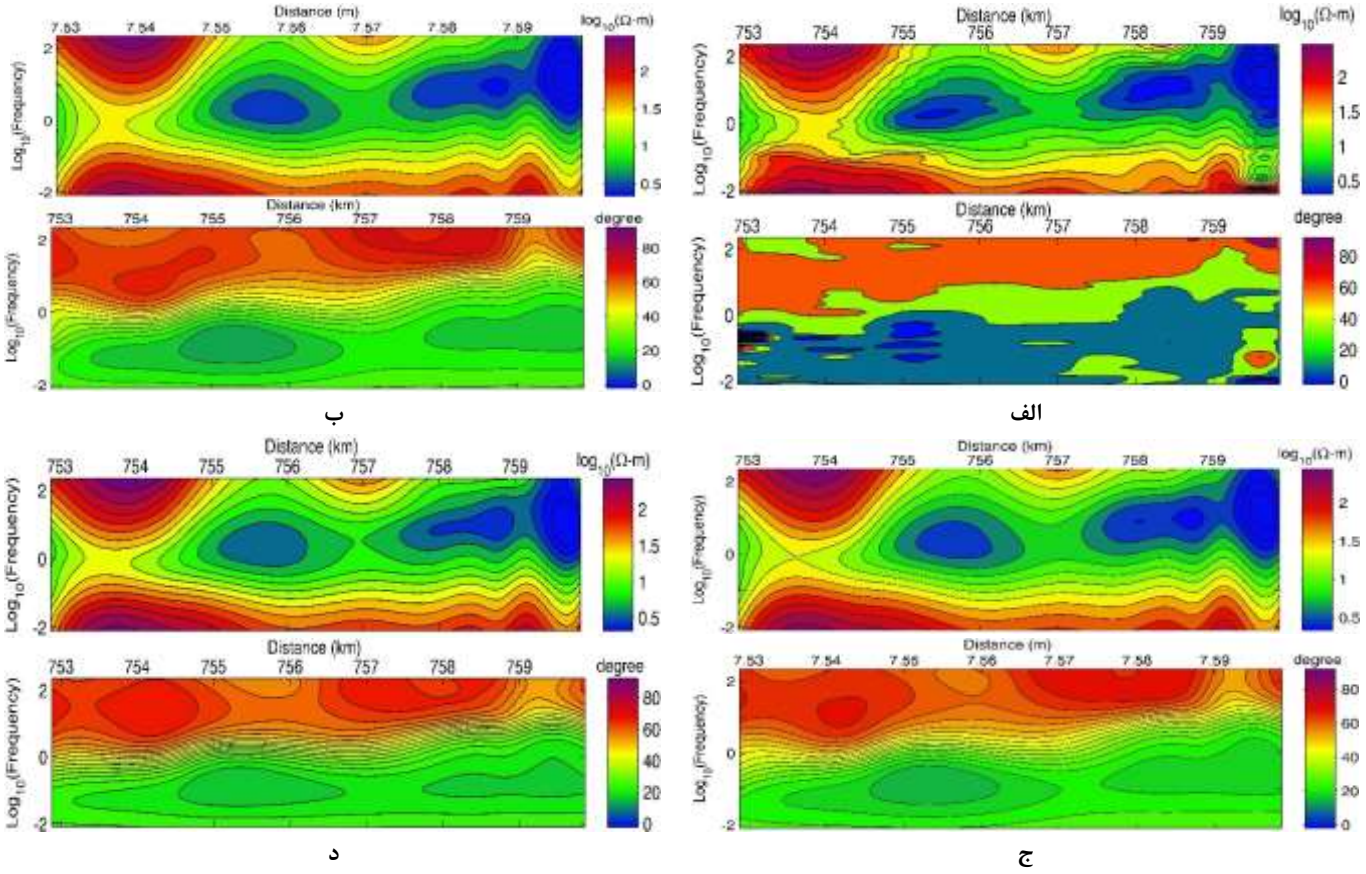
شکل (۷): مقایسه نتایج مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی بر روی پروفیل P7 منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر). الف – مدل به دست آمده از روش ACB (RMS = 0.66%)، ب – مدل به دست آمده از روش GCV تعمیم یافته (RMS = 0.53%)، ج – مدل به دست آمده از روش منظم‌سازی انطباقی (RMS = 0.42%).

در تمامی پروفیل‌ها، روند مقاومت‌ویژه زیاد در سطح مشاهده می‌شود. با در نظر گرفتن اطلاعات نقشه زمین‌شناسی این مقاومت به دلیل وجود سنگ‌های ریولیتی و آندزیتی آتش‌فشانی می‌باشد. مقاومت‌ویژه کم در عمق ۵۰۰ تا ۱۵۰۰ متری حاکی از وجود کانی‌های رسی زئولیت - اسمکتیت و آلتراسیون آرژیلیتی به عنوان پوشش مخزن می‌باشد. همچنین مقاومت‌ویژه زیاد در عمق ۲۵۰۰ تا ۳۰۰۰ متری را می‌توان ناشی از وجود سنگ‌های آندزیتی و تراکی‌آندزیتی یا توده‌های لاکولیتی با جنس داسیت باشد که می‌توان به عنوان منبع داغ زمین گرمایی تفسیر نمود (زینال‌پور، ۱۳۹۳). در مقایسه نتایج مقاطع دو بعدی به دست آمده از روش‌های مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی بر روی پروفیل P7 منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر)، روش منظم‌سازی انطباقی مدلی به مراتب دقیق‌تر به خصوص در شناسایی مرزهای مناطق با مقاومت‌های ویژه‌های کم و زیاد و همچنین کمترین زمان و خطای محاسباتی را ارائه کرده است. بعد از این روش، به ترتیب، روش‌های GCV تعمیم یافته و روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB) نتایج قابل قبولی داشته‌اند که موید نتایج به دست آمده از مدل مصنوعی می‌باشد.

جدول (۲) نتایج به دست آمده برای مدل‌سازی پروفیل P7 منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر) را نشان می‌دهد.

جدول (۲): مقایسه روش‌های مختلف انتخاب پارامتر منظم‌سازی بر روی پروفیل P7 منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر)

روش‌ها	زمان سپری شده (ثانیه)	میزان حافظه لازم (Mb)	تعداد تکرارهای بهینه	خطای RMS
متعادل‌سازی قید فعال (ACB)	۲۷۹,۱	۴۱,۲	۹	٪ ۰,۶۶
GCV تعمیم یافته	۳۵۲,۹	۵۳,۸	۱۰	٪ ۰,۵۳
منظم‌سازی انطباقی	۱۶۴,۳	۳۳,۹	۵	٪ ۰,۴۲



شکل (۸): مقایسه شبه مقاطع داده‌های مقاومت‌ویژه ظاهری و فاز مشاهده‌ای (الف) بر روی پروفیل P7 منطقه زمین گرمایی بوشلی (نیر) بر مبنای الگوریتم دوقطری‌سازی لنکزوس و پاسخ مدل حاصل از وارون‌سازی دو بعدی با بکارگیری روش‌های ACB (ب)، GCV تعمیم یافته (ج) و منظم سازی انطباقی (د).

۴ - نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به دست آمده، روش GCV تعمیم یافته به دلیل محاسبات مربوط به مدل‌سازی پیشرو برای هر پارامتر منظم‌سازی انتخابی در هر تکرار در یک محدوده جستجوی بزرگ، بیش‌ترین میزان حافظه و زمان را برای انجام وارون‌سازی نیاز دارد. روش متعادل‌سازی قید فعال (ACB) از روش GCV تعمیم یافته سریع‌تر است ولی در مقایسه با روش منظم‌سازی انطباقی کندتر عمل می‌کند. این روش نیز، همانند روش GCV تعمیم یافته نیازمند محاسبه مقداری بهینه در یک محدوده جستجو بین بیشترین و کمترین مقدار انتخابی توسط کاربر است در نتیجه میزان زمان و حافظه افزایش خواهد یافت ولی میزان بار محاسباتی این روش در مقایسه با روش GCV تعمیم یافته کمتر است. از نظر دقت عملکرد مدل‌سازی، هر سه روش مدل‌هایی قابل قبول و تقریبا مشابهی ارائه داده‌اند. روش منظم‌سازی انطباقی در مقایسه با روش‌های دیگر روشی بسیار قدرتمند در تخمین پارامتر منظم‌سازی می‌باشد، این روش دارای کمترین میزان حافظه و زمان لازم برای انجام مدل‌سازی وارون در کمترین تکرار می‌باشد همچنین حداکثر دقت با کمترین میزان خطای RMS نیز مربوط به این روش می‌باشد. کارآمدی این روش در تخمین پارامتر منظم‌سازی مطلوب و در نتیجه تولید مدلی ایده‌آل برای وارون‌سازی داده‌های مصنوعی و واقعی، در این تحقیق نشان داده شده است. بنابراین این روش به عنوان روشی مناسب در انتخاب پارامتر منظم‌سازی برای وارون‌سازی داده‌های مگنتوتلوریک دو بعدی در حجم بزرگ محسوب می‌گردد.

۵- منابع

رضایی، م.، مرادزاده، ع.، نجاتی کلاته، ع. و آقاجانی، ح.، ۱۳۹۴، برآورد خودکار پارامتر منظم‌سازی به روش تخمینگر نااریب ریسک احتمالی در وارون‌سازی سه بعدی مقید داده‌های مغناطیسی، نشریه پژوهش‌های ژئوفیزیک کاربردی، **۳**، ۲، ۱۴۵-۱۵۴.

زینال‌پور، ع.، قائدرحمتی، ر.، مرادزاده، ع. و رحمانی، م. ر.، ۱۳۹۷، اکتشاف ذخایر زمین گرمایی در منطقه بوشلی- سبلان با استفاده از داده‌های مگنتوتلوریک، مجله پژوهش‌های ژئوفیزیک کاربردی، **۴**، ۲، ۱۷۱-۱۸۶.

زینال‌پور، ع.، ۱۳۹۳، پردازش، مدل‌سازی و تفسیر داده‌های مگنتوتلوریک منطقه بوشلی (استان اردبیل) با هدف اکتشاف منابع زمین گرمایی، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود.

سانا.، ۱۳۷۵، گزارش زمین‌شناسی ناحیه نیر (جنوب غرب شهرستان اردبیل) شرکت کاوشگران، شرح نقشه زمین‌شناسی ۱:۲۰۰۰۰.

قائد رحمتی، ر.، مرادزاده، ع.، فتحیان‌پور، ن. و سونگ ک. ل.، ۱۳۹۴، بهبود وارون‌سازی دوبعدی داده‌های مگنتوتلوریک با استفاده از روش‌های خودکار انتخاب پارامتر منظم‌سازی، مجله ژئوفیزیک ایران، **۹**، ۳۰-۴۵.

گویا، ن.، ۱۳۸۱، گزارش طرح اولیه اکتشاف منابع زمین گرمایی در منطقه جنوب سبلان (بوشلی)، سازمان انرژی اتمی ایران، مرکز توسعه انرژی‌های نو، بخش زمین گرمایی.

مرادزاده، ع.، ۱۳۹۳، گزارش اکتشاف ذخایر زمین گرمایی در منطقه بوشلی (نیر) توسط داده‌های مگنتوتلوریک، سازمان انرژی‌های نو ایران (سانا).

Abedi, M., Gholami, A., Norouzi, G.H., and Fathianpour, N., 2013, Fast inversion of magnetic data using Lanczos bidiagonalization method, J. Appl. Geophys, **90**, 126.

Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H., 2013, Parameter estimation and inverse problems, second edition, Academic Press, US, 360.

Bauer, F., and Lukas, M. A., 2011, Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems: Mathematics and Computer in Simulation, **81**, 1795-1841.

Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data: Geophysics, **52**, 289–300.

Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A., 1996, Regularization of inverse problems, **375**, Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, 333.

Farquharson, C. G., and Oldenburg, D. W., 2004, A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non- linear inverse problems: Geophys. J. Int., **156**, 411–425.

Geosystem SRL., 2003, A guide to using WinGLink, ver.2. 3. 1.

Haber, E., and Oldenburg, D. W., 2000, A GCV based method for nonlinear ill-posed problems: Computer and Geosciences, **4,** 41–63.

Hadamard, J., 1923, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations: Yale University Press, New Haven.

Hansen, P. C., 1997, Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion: SIAM, Philadelphia.

Hansen, P. C., 2010, Discrete inverse problems: insight and algorithms, **7**, SIAM, US, 213.

Hansen, P. C., Jensen, T. K., Rodriguez, G., 2007, An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion: J. Comput. Appl. Math., **198**, 483–492.

Hansen, P.C., 2007, Regularization Tools Version 4.1 for Matlab 7.3, Numerical Algorithms, **46**, 189-194.

Lawson, C. L., and Hanson, R. J., 1974, Solving least squares problems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, US, 330.

Lee, S. K., Kim, H., J., Song, Y., and Lee, C., 2009, MT2DInvMatlab- A program in MATLAB and FORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion: Computers & Geosciences, **35**, 1722-1735.

Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1998, 3-D inversion of gravity data, Geophysics, **63**, 1, 109.

Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1999, 3-D inversion of DC resistivity data using an L-curve criterion: 69th Ann. Int. Meeting of the SEG, Expanded Abstracts, 251–254.

Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 2000, Three dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients: Geophys. J. Int., **140**, 410 – 424.

Oldenburg, D. W., and Li, Y., 2005, Inversion for applied geophysics: A tutorial, pp 89-150, In: "Near-surface geophysics", Butler, D. K., SEG, Investigations in Geophysics, US.

Paige, C. C., and Saunders, M. A., 1982, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares, ACM Trans. Math. Soft. (TOMS), **8**, 1, 43.

Rodi, W. L., and Mackie, R. L., 2001, Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion: Geophysics, **66**, 174–187.

Rodi, W.L., 1976. A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **44**, 483–506.

Sasaki, Y., 2004, Three dimensional inversion of static-shifted magnetotelluric data: Earth Planets Space, **56**, 239–248.

Siripunvaraporn, W., and Egbert, G., 2000, An efficient data sub space inversion method for 2-D magnetotelluric data: Geophysics, **65**, 791– 803.

Smith, J. T., and Booker, J. R., 1991, Rapid relaxation inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data: J. Geophys. Res., **96**, 3905–3922.

Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, Solution of ill-posed problems: V. H. Winston and Sons.

Vatankhah, S., Renaut, R. A., and Ardestani, V. E., 2014, Regularization parameter estimation for underdetermined problems by the $\chi 2$ principle with application to 2D focusing gravity inversion, Inverse Prob., **30**, 85002.

Vio, R., Ma, P., Zhong, W., Nagy, J., Tenorio, L., and Wamsteker, W., 2004, Estimation of regularization parameters in multiple image deblurring: Astron. Astrophys., **423**, 1179–1186.

Vogel, C. R., 2002, Computational methods for inverse problems, **23**, Siam, US, 182.

Wahba, G., 1990, Spline Models for observational data: SIAM, Philadelphia.

Walker, S. E., 1999, Inversion of EM data to recover 1-D conductivity and a geometric survey parameter: MSc thesis, University of British Columbia.

Yi, M. J., Kim, J. H., and Chung, S. H., 2003, Enhancing the resolving power of least squares inversion with active constraint balancing: Geophysics, **68**, 931–941.

Zhdanov, M. S., 2002, Geophysical inverse theory and regularization problems: Elsevier.