



مقایسه‌ی عملکرد الگوریتم‌های بهینه‌سازی نیوتنی و شبه نیوتنی در وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک در حیطه فرکانس برای یک مدل مصنوعی

سیامک ابوالحسنی^{۱*}، نوید امینی^۲ و حمیدرضا سیاه کوهی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

۲- استادیار، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

۳- استاد، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۰۳؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۱۰/۱۲

* نویسنده مسئول مکاتبات: sabolhassani@ut.ac.ir

چکیده

یک مسئله کلیدی در پردازش داده‌های لرزه‌ای و تصویرسازی با استفاده از این داده‌ها، تخمین درست سرعت انتشار امواج لرزه‌ای است. وارون سازی شکل موج کامل، یک روش نوین جهت تخمین پارامترهای زیرسطحی مانند سرعت، چگالی و فاکتور کیفیت است. این روش، یک مسئله وارون در ژئوفیزیک محسوب می‌شود؛ که در آن به دنبال پارامترهایی می‌باشند که شکل موج‌های ثبت شده (لرزه نگاشت‌ها) را توصیف نمایند. فرآیند وارون سازی شکل موج کامل در قالب یک مسئله بهینه‌سازی از طریق تعریف یک تابع هزینه به صورت اختلاف بین شکل موج‌های مشاهده‌ای (ثبت شده) و شکل موج‌های محاسبه‌ای بیان می‌شود. در تصویرسازی دوبعدی و سه‌بعدی، اندازه فضای پارامترهای مدل و همچنین پیچیدگی‌های محاسباتی مدل‌سازی مستقیم اجازه‌ی استفاده از روش‌های بهینه‌سازی سراسری را نخواهد داد و باید تابع هزینه از طریق روش‌های بهینه‌سازی محلی، کمینه شود. مسئله حداقل سازی در این روش اغلب به صورت یک فرآیند تکراری از طریق روش‌های گرادیانی که بر پایه مشتقات مرتبه اول و دوم تابع هزینه عمل می‌کنند، انجام می‌شود. در این مقاله به مقایسه عملکرد دو الگوریتم بهینه‌سازی، الگوریتم گاوس-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین و الگوریتم شبه نیوتنی L-BFGS پرداخته می‌شود. الگوریتم گاوس-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین، یک الگوریتم استاندارد گاوس-نیوتن به شمار می‌رود؛ که با اصلاحاتی بر محاسبه‌ی صریح ماتریس هشین جهت کاهش بار محاسباتی همراه شده است و الگوریتم L-BFGS، یک الگوریتم شبه نیوتنی است که در آن نیازی به محاسبه صریح ماتریس هشین ندارد. در این مقاله، عملکرد و کارایی این دو الگوریتم بهینه‌سازی از لحاظ کیفی و کمی روی یک مدل سرعت مصنوعی بررسی می‌شود. مطابق نتایج ملاحظه خواهد شد که هر دو روش موفق شده‌اند مدل صحیح را به لحاظ کیفی به خوبی بازسازی نمایند. همچنین با بررسی کمی عدم تطابق بین مدل صحیح و مدل وارون شده برای هر دو الگوریتم، این جمع‌بندی به دست می‌آید که عملکرد الگوریتم گاوس-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین، در ۴۰ تکرار صورت گرفته در این مطالعه، عملکرد نسبتاً بهتری داشته است.

واژگان کلیدی

تصویرسازی لرزه‌ای
وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک
بهینه‌سازی غیرخطی
روش بهینه‌سازی گاوس-نیوتن
روش بهینه‌سازی شبه نیوتنی
Limited-Memory BFGS
شبه هشین

۱- مقدمه

از جمله مراحل بسیار مهم در پردازش و تفسیر داده‌های لرزه‌ای، تخمین مدل سرعت است. اهمیت یک مدل سرعت قابل اعتماد در مراحل مهاجرت، تبدیل زمان به عمق مقاطع لرزه‌ای بر کسی پوشیده نیست. در حقیقت، تخمین یک مدل سرعت دقیق می‌تواند تا حد زیادی باعث کاهش ریسک فرایند اکتشاف شود. پر واضح است که با افزایش پیچیدگی‌های ساختمانی منطقه‌ی مورد اکتشاف، این اهمیت نمایان‌تر خواهد شد. از یک دیدگاه کلی در مقوله‌ی اکتشافات نفت و گاز، رهیافت‌های تعیین و برآورد پارامترهای فیزیکی زمین از قبیل سرعت انتشار و چگالی را می‌توان به دو دسته بزرگ تقسیم کرد: رهیافت‌های مستقیم و رهیافت‌های غیرمستقیم. در رهیافت‌های مستقیم، توصیف و شناسایی پارامترهای فیزیکی با استفاده از روش‌های مستقیمی همچون استفاده از مغزه‌ها، بررسی نمونه‌های به دست آمده از چاه‌ها و مطالعه‌ی نگارهای چاه پیمایی صورت می‌پذیرد؛ اما در مسائل بزرگ مقیاسی همچون تخمین مدل سرعت با هدف تصویرسازی لرزه‌ای که امکان پیاده‌سازی رهیافت‌های مستقیم وجود ندارد؛ نقش رهیافت‌های غیرمستقیم برجسته می‌گردد. در فرآیندهای غیرمستقیم، یکی از روش‌های محبوب به منظور توصیف و شناسایی پارامترهای فیزیکی زمین، وارون سازی داده‌ها است. مسائل وارون به طور گسترده‌ای در تمام علوم وجود داشته و تقریباً هر جا که هدف، شناخت و توصیف سیستم‌ها از طریق خواصی که از خود بروز می‌دهند باشد، حضور خواهند داشت. نوعی از وارون سازی که امروزه بسیار مورد توجه محققین لرزه‌شناسی قرار گرفته، وارون سازی شکل موج کامل است. وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک عبارت است از بازسازی مدل سرعتی زمین (سرعت موج تراکمی) از طریق حل یک مسئله وارون غیرخطی که از حل یک معادله موج آکوستیک دو طرفه به منظور مدل‌سازی انتشار موج استفاده می‌نماید (امینی و جواهریان، ۱۳۹۰). از آنجا که این نوع وارون سازی بر پایه مدل، از حل معادله موج دوطرفه در برازش داده‌های محاسبه‌ای بر داده‌های مشاهده‌ای بهره می‌برد، باید اذعان نمود که در مقایسه با دیگر روش‌های وارون سازی بر پایه‌ی مدل، از نتایج با دقت بهتری برخوردار است (امینی و جواهریان، ۱۳۹۰). همچنین با توجه به این‌که در وارون سازی شکل موج کامل، تمامی اطلاعات موجود در لرزه نگاشت‌ها اعم از زمان رسید اول، دامنه و فاز مورد استفاده قرار می‌گیرند، گستره پارامترهایی که می‌توانند داده مشاهده‌ای را توصیف نمایند، محدودتر شده و لذا از نظر یکتایی پاسخ، تفاوت معنی‌داری مابین نتایج حاصل از وارون سازی شکل موج کامل و دیگر روش‌های وارون سازی بر پایه مدل به وجود خواهد آمد. باید یادآوری نمود که اگرچه از لحاظ تئوری، روش‌های وارون سازی شکل موج کامل بسیار کارا هستند، اما در عمل پیچیدگی‌های محاسباتی (یک مرتبه سنگین‌تر از مهاجرت عمقی پیش از برانبارش) و ظرافت‌های عددی خاص خود را نیز دارند (امینی و جواهریان،

۱۳۹۰). در سالیان اخیر بسیاری از محققین، اصول نظری و عملی این روش را مورد مطالعه قرار داده‌اند. مطالعات ابتدایی روی اصول نظری، توسط (Lailly (1983)، Mora و Tarantola (1984) و (1989) صورت گرفت و پس از آن مقالات زیادی در خصوص مشکلات پیش روی یک فرآیند وارون سازی شکل موج کامل توسط (Sun et al. (1992)، Pratt (1999)، Shipp et al. (2002)، (Dessa et al. (2004)، Ravaut et al. (2004) و همچنین (Brenders and Pratt (2007 ارائه شدند. با افزایش قدرت رایانه‌ها، وارون سازی شکل موج توسط محققین مختلفی در بازسازی پارامترهای زیرسطحی مدل‌های سه‌بعدی به کار گرفته شد (Fichtner et al., 2009, Epanomeritakis et al., 2008)، (Plessix et al., 2010, Plessix, 2009, Sirgue et al., 2010 و (Vigh et al., 2010). همچنین (Virieux and Operto (2009 به تفصیل اصول نظری و سیر تکاملی روش وارون سازی شکل موج کامل را مرور کرده‌اند. بعد از آن، بازسازی همزمان پارامتر چگالی در کنار پارامتر سرعت موج تراکمی در محیط‌های آکوستیک توسط (Operto et al. (2012)، Jeong et al. (2013) و همچنین (Prioux et al. (2013) و (Operto et al. (2013) بررسی شدند. همچنین وارون سازی پارامتر فاکتور کیفیت در کنار پارامتر سرعت موج تراکمی در محیط‌های آکوستیک توسط (Prioux et al. (2013)، Kamei and Pratt (2013) و نیز (Operto et al. (2013) مورد بررسی قرار گرفتند. تا امروز، روش‌های بهینه‌سازی تکراری مختلفی مانند روش بیشترین کاهش، روش گرادیان مزدوج غیرخطی، روش نیوتن کامل، روش گاو-نیوتن و روش شبه نیوتنی BFGS حافظه محدود (L-BFGS) در وارون سازی شکل موج کامل توسط (Pratt et al. (1998)، Brossier et al. (2011)، (Hu et al. (2011)، (Anagaw and sacchi (2012)، (Asnaashari et al. (2013) و نیز (Operto et al. (2013) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. شایان ذکر است در مسئله‌های بزرگ مقیاس وارون سازی شکل موج کامل، روش‌های نیوتنی (که به ماتریس هشین احتیاج دارند) به علت نرخ بالاتر همگرایی‌شان نسبت به روش‌های فقط بر پایه گرادیان، روشی کارآمدتر محسوب می‌شوند. این نرخ همگرایی بالاتر در روش‌های نیوتنی، بدون دردسر نیز نخواهد بود و مانعی سخت تحت عنوان هزینه محاسباتی ماتریس وارون هشین (ماتریس هشین، ماتریسی متراکم و بسیار بزرگ است) را به دنبال خواهد داشت. با به کار گرفتن روش‌های شبه نیوتنی که یک جایگزین مقرون به صرفه را به جای محاسبه وارون ماتریس هشین دقیق در روش‌های نیوتنی، ارائه می‌نمایند؛ می‌توان تا حد زیادی بر این هزینه محاسباتی فائق آمد. روش شبه نیوتنی L-BFGS، به طور گسترده‌ای توسط محققین مختلفی همچون (Brossier et al. (2009)، (Romdhane et al. (2011) و (Asnaashari et al. (2013) و نیز (Operto et al. (2013) در

جهت اجرای مدل‌سازی مستقیم مورد نیاز برای حل مسئله‌ی تعریف شده، فرم بسته‌ی معادله موج دو بعدی آکوستیک در حیطه فرکانس (Ravaut et al., 2004) در نظر گرفته می‌شود (پارامترهایی که تعریف آن‌ها در متن نیامده است، در قسمت فهرست نمادها، تعریف شده‌اند):

$$\frac{\omega^2}{K(x,z)}P(x,z,\omega) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(x,z)} \frac{\partial P(x,z,\omega)}{\partial z} \right) = S(x,z,\omega) \quad (1)$$

رابطه (۱) یک معادله مشتقات جزئی مرتبه دوم از نوع هذلولوی است. پس از گسسته سازی رابطه (۱) به کمک روش تفاضلات متناهی، آن را به فرم ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$BP = S \quad (2)$$

در رابطه (۲)، B ماتریس امپدانس نامیده می‌شود و تابع ویژگی‌های فیزیکی محیط و همچنین فرکانس است (Marfurt, 1984). P میدان فشار و S حاوی تابع چشمه فشاری است. در مدل‌سازی مستقیم، ماتریس B و بردار S معلوم و بردار P مجهول است. در این مطالعه جهت گسسته سازی معادله موج آکوستیک از یک استنسیل ۵ تایی ساده استفاده شده و همچنین در مرزهای مدل جهت اجتناب از بازتاب‌های ناخواسته، از معادله موج یک طرفه مرتبه دوم (Second-Order ABC) بهره گرفته شده است (Narayanan and Meng, 1988). به دلیل استفاده از مرزهای جاذب نوع ABC مرتبه دوم، ماتریس B یک ماتریس مختلط و نامتقارن خواهد بود. این ماتریس یک ماتریس تَنک با ساختار قطری بلوکی است (شکل ۲). در شکل ۲ که بیانگر ساختار ماتریس امپدانس است و درایه‌های غیر صفر در آن با نقطه نمایش داده شده‌اند، nx بیانگر تعداد گره‌های شبکه گسسته سازی در راستای محور xها و همچنین nz بیانگر تعداد گره‌های شبکه گسسته سازی در راستای محور zها است. با توجه به ابعاد ماتریس B، محاسبه وارون آن به روش مرسوم منطقی نیست؛ به این علت که ماتریس B-1 مؤلفه‌های غیر صفر زیادی خواهد داشت؛ که علاوه بر حجم زیاد محاسبات، حجم زیادی حافظه جهت ذخیره‌سازی را می‌طلبد. جهت غلبه بر این مشکل، از روش‌های حل مستقیم مبتنی بر تجزیه LU برای ماتریس‌های قطری بلوکی استفاده می‌شود؛ که منجر به فرآیند حل پایداری برای (۲) می‌گردد. همچنین لازم به ذکر است که حل دستگاه (۲) به کمک روش مستقیم نظیر تجزیه LU به ما کمک خواهد کرد که میدان موج حاصله از تعداد زیادی چشمه با مشخصات مکانی متفاوت (با توجه به این که فقط یک مرتبه به تجزیه ماتریس امپدانس جهت حل رابطه (۲) نیاز است) به صورت کارآمد

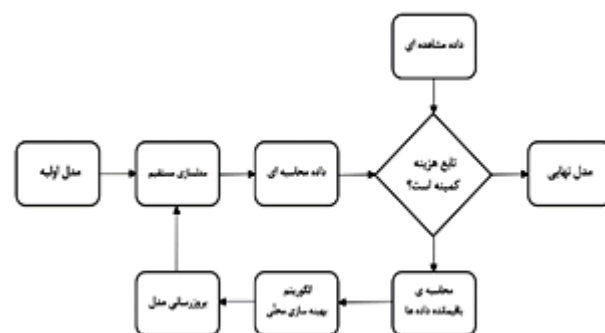
فرآیند وارون سازی شکل موج کامل مورد استفاده قرار گرفته است. شایان ذکر است در محیط‌های پیچیده زمین‌شناسی، با بکار نبردن مدل اولیه دقیق، شانس به دام افتادن در نقاط کمینه محلی تابع هزینه بسیار افزایش می‌یابد؛ اما انجام فرآیند وارون سازی شکل موج کامل در حیطه فرکانس سبب خواهد شد تا از شدت غیرخطی شدن مسئله وارون با کمک رویکرد چند مقیاسی (Pratt and Worthington, 1990 و Sirgue and Pratt, 2004) کم شود. هرچند تقریب آکوستیکی مورد بحث در این مقاله، باعث رخداد بعضی محدودیت‌ها در مدل‌سازی درست دامنه‌ها می‌شود؛ اما مزایایی همچون بار محاسباتی کمتر و نیز چالش‌های کمتر آن در مقایسه با حالت الاستیک (Virieux and Operto, 2009)، کاربران را متقاعد به استفاده از آن می‌نماید.

۲- وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک

وارون سازی شکل موج داده‌های لرزه‌ای ابزاری است کارا جهت تصویرسازی داده‌های لرزه‌ای؛ که قادر است تصاویر با قدرت تفکیک بالا از ساختارهای زمین‌شناسی زیر سطحی ارائه نماید. از آنجا که در این نوع وارون سازی علاوه بر داده‌های زمان سیر، از دامنه و شکل موج لرزه نگاشت‌ها نیز استفاده می‌شود، در مقایسه با وارون سازی داده‌های زمان سیر، قدرت تفکیک بالاتری دارد. پیش از ورود به تئوری وارون سازی شکل موج کامل، در شکل ۱ مروری بر گردش کار این نوع از وارون سازی و بلوک‌های سازنده این فرآیند آمده است.

۲-۱- مدل‌سازی مستقیم

در این مطالعه، معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسئله با استفاده از تقریب‌های تفاضلات متناهی، گسسته سازی می‌شود. درست است که گسسته سازی با روش تقریب‌های تفاضلات متناهی دارای محدودیت‌هایی از جمله عدم دقت در محاسبه مشتق و دشواری اعمال شرایط مرزی در مرزهای غیرخطی است؛ اما مزایایی همچون سادگی در پیاده‌سازی و حجم محاسبات کمتر (با توجه به امکانات آزمایشگاهی موجود)، کاربران را متقاعد به استفاده از آن می‌نماید.



شکل ۱: گردش کار یک وارون سازی شکل موج کامل.

می‌گردد. در روش‌های حل بر پایه مدل برعکس روش‌های بر پایه عملگر مستقیم، هیچ تلاشی برای وارون کردن فیزیک عکس مسئله یا همان معکوس کردن عملگر مستقیم انجام نمی‌شود و مسئله در یک سطح پایین‌تر در قالب یک مسئله بهینه‌سازی حل می‌شود. در این مطالعه، تابع هزینه به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\min_m \{C(m)\} \quad (3)$$

$$C(m) = \frac{1}{2} \delta d^\dagger W_d \delta d + \frac{1}{2} \lambda (m - m_{prior})^\dagger W_m (m - m_{prior}) \quad (4)$$

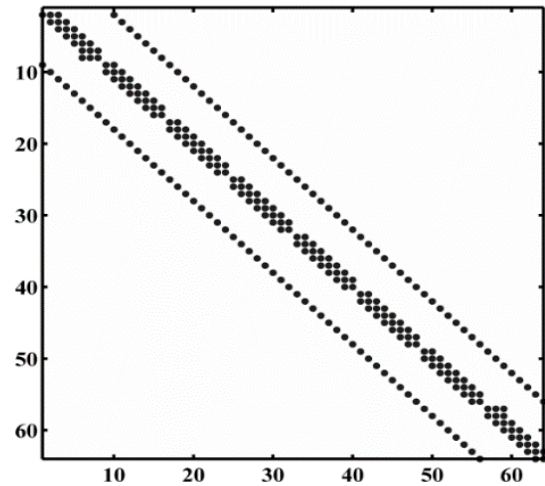
در رابطه (۴) بیانگر بردار باقیمانده داده‌ها است؛ که توسط ماتریس وزن دهی W_d وزن دار شده است. نماد † بیانگر عملگر ترانپوز مزدوج است. ماتریس وزن دهی W_d بردار باقیمانده داده‌ها را بر حسب فاصله چشمه تا گیرنده وزن دار می‌کند (Ravaut et al., 2004). در رابطه (۴) جمله منظم سازی $(m - m_{prior})^\dagger W_m (m - m_{prior})$ است که در آن λ وزنی است که در خصوص اهمیت نسبی بین خطای مدل و خطای داده تصمیم می‌گیرد. m_{prior} یک مدل مرجع است که در این مطالعه، مدل اولیه به عنوان مدل مرجع در نظر گرفته شده است. W_m یک ماتریس وزن دهی است که بر فضای مدل اعمال می‌شود و به صورت عکس ماتریس کواریانس در فضای مدل (Tarantola, 1987) تعریف می‌شود. در حقیقت ماتریس کواریانس، یک ماتریس مربعی با ابعاد $[n_m \times n_m]$ خواهد بود که مؤلفه‌های واریانس متناظر با پارامترهای مدل، روی قطر اصلی آن قرار گرفته‌اند. در وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک که عملگر g شبه خطی (طبق تعریف (Tarantola, 1987)) است، بدون تقریب خطی برای عملگر g ، با تابع هزینه‌ای روبرو هستیم که چندین کمینه دارد. اما اگر فرض این است که با توجه به شبه خطی بودن عملگر g می‌توان آن را حول یک نقطه شروع مثل m_0 تقریب خطی زد. آنگاه تابع هزینه‌ای از درجه دوم به دست خواهد آمد که یافتن نقطه کمینه آن بسیار ساده خواهد بود. اگر این فرآیند را به صورت یک رویکرد تکراری انجام شود، در انتها می‌توان امیدوار بود که به نقطه کمینه مطلق تابع هزینه همگرا شویم. لذا با نوشتن بسط تیلور مرتبه دوم تابع هزینه و محاسبه نقطه کمینه محلی آن، رابطه به روز رسانی پارامترهای مدل در یک روش نیوتنی استاندارد از قرار زیر می‌گردد:

$$m^{(k+1)} = m^{(k)} + \gamma^{(k)} \delta m^{(k)} \quad (5)$$

$$\delta m_i = - \mathcal{H}^{-1}(m_i) \nabla C(m_i) \quad (6)$$

در رابطه (۵)، γ طول گام منظم سازی است. توجه به رابطه (۴)، بردار گرادیان تابع هزینه در محل هر پارامتر و در هر تکرار به صورت زیر به دست خواهد آمد:

به دست آید. این خاصیت، وارون سازی شکل موج در حیطه فرکانس را از منظر شبیه‌سازی همزمان چندین چشمه موج، بسیار جذاب خواهد کرد (Pratt and Worthington, 1990).



شکل ۲: الگوی تنکی ماتریس امیدانس با شرایط مرزی ABC مرتبه دوم برای $nx = nz = 8$.

۲-۲- مدل سازی وارون

روش‌های حل یک مسئله وارون به شکل $g(m) = d$ ، به دو دسته‌ی بر پایه‌ی عملگر مستقیم و یا بر پایه‌ی عملگر مدل، تقسیم می‌شوند (Sen and Stoffa, 2013). از جمله مشکلات روش‌های حل بر پایه عملگر مستقیم می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:

الف- چالش پیاده‌سازی فیزیک عکس مسئله (اغلب، عملگر مستقیم شبه خطی تا غیر خطی است).

ب- مسائل وارون پیوسته در ژئوفیزیک معمولاً زیر مجموعه مسائل بد وضع هستند (Kabanikhin, 2008) که پس از گسسته سازی، این خاصیت به حالت گسسته‌ی مسئله نیز به ارث خواهد رسید (Hanke and Hansen, 1993). در حقیقت، این خاصیت منجر به بد شرطی ماتریس ضرایب (ناپایداری پاسخ مسئله) تا منفرد شدن ماتریس ضرایب (نایکتایی پاسخ مسئله به دلیل ناتهی شدن فضای پوچی ماتریس ضرایب) خواهد شد.

پ- در ژئوفیزیک، اغلب با مسائل فرو معین روبرو هستیم (Backus and Gilbert, 1967). این خاصیت، عدم وجود جواب تا نایکتایی پاسخ مسئله را به دنبال خواهد داشت.

ت- روی داده، نوفه وجود دارد. عدم وجود پاسخ دقیق برای مسئله به دنبال نوفه روی داده بدیهی است.

ث- عملگر مستقیم یا همان مدل ساز ریاضی مسئله، دقیق نیست (به خاطر فرضیات ساده ساز در مدل سازی ریاضی). عدم وجود پاسخ دقیق برای مسئله به دنبال اختلال روی داده بدیهی است.

بدین ترتیب، لزوم استفاده از روش‌های حل بر پایه مدل نمایان

B^{-1} در رابطه (۱۲) را یک ماتریس همانی در نظر گرفته و ماتریس شبه هشین (Pseudo Hessian) را ارائه کردند؛ تا گرادیان تابع هزینه را با بار محاسباتی پایین‌تری مقیاس نمایند (Shin et al., 2001). یعنی:

$$\mathcal{H}_p = \Re\{W_m^{-1} \mathcal{F}^* W_d \mathcal{F} + \lambda I\} \quad (13)$$

در یک شبه هشین ($\mathcal{H}_p$) می‌توان نشان داد که عناصر قطری، غالب هستند (Shin and Min, 2006 و Kim et al., 2011). یعنی در محاسبات می‌توانی تنها از قطر اصلی شبه هشین، جهت کاهش بار محاسباتی بهره جست:

$$\mathcal{H}_p = \Re\{W_m^{-1} \text{diag}(\mathcal{F}^* W_d \mathcal{F}) + \lambda I\} \quad (14)$$

۲-۲-۲- محاسبات ماتریس هشین (الگوریتم L-BFGS)

در الگوریتم شبه نیوتنی L-BFGS، ارائه شده توسط Nocedal (1980)، با قرار دادن دو فرض محدود کننده به روی ماتریس هشین (شامل بخش خطی و غیرخطی)، به تساوی (۱۵) خواهیم رسید. فرض‌های محدود کننده از قرار زیرند:

(الف) $\mathcal{H}^{-1}$ متقارن باشد.

(ب) عدم تغییر ناگهانی و شدید مؤلفه‌های ماتریس وارون هشین در هر تکرار.

سیس، برای یک $\mathcal{H}_0^{-1}$ مشخص، $\mathcal{H}^{-1(k+1)}$ با برقراری تساوی (۱۵) برحسب زوج بردارهای تفاضلی (۱۸) به دست خواهد آمد. در (۱۸) $\hat{b} = \min\{b, k\}$ است.

$$\mathcal{H}^{-1(k+1)} y^{(k)} = s^{(k)} \quad (15)$$

$$s^{(k)} = m^{(k+1)} - m^{(k)} \quad (16)$$

$$y^{(k)} = \nabla C^{(k+1)} - \nabla C^{(k)} \quad (17)$$

$$\{s_i, y_i\}, \quad k - \hat{b} + 1 \leq i \leq k \quad (18)$$

در هر تکرار وقتی $k > b$ می‌شود، قدیمی‌ترین جفت از دنباله (۱۸) حذف شده و جدیدترین جفت جایگزین می‌شود. ملاحظه می‌شود که در این روش نیازی به تشکیل صریح ماتریس وارون هشین نبوده، بعلاوه اینکه کاربر میزان کمی از حافظه را با در نظر گرفتن عدد کوچک b (معمولاً بین ۳ تا ۷) استفاده می‌کند. با توجه به این که ثابت می‌شود تعداد نامحدودی ماتریس هشین مثبت معین وجود دارند که در رابطه (۱۵) صدق می‌کنند، داریم:

$$\min_{\mathcal{H}^{-1}} \|\mathcal{H}^{-1} - \mathcal{H}^{-1(k+1)}\|_{\text{Some-Norm}} \quad \text{subject to :} \quad (19)$$

$$\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1T}, \quad \mathcal{H}^{-1} y^{(k)} = s^{(k)}$$

و معروف‌ترین پاسخ برای بهینه‌سازی (۱۹) عبارت است از:

$$\nabla C_{m_i} = \Re\{W_m^{-1} \mathcal{F}^* W_d \delta d + \lambda (m_i - m_{i \text{ Prior}})\} \quad (7)$$

روش Adjoint state (Plessix, 2006)، محاسبات سریع گرادیان تابع هزینه بجای محاسبه صریح ماتریس ژاکوبی ($\mathcal{J}$) را ممکن می‌سازد. یعنی:

$$\nabla C_{m_i} = \Re\{W_m^{-1} \mathcal{F}_i^* V_i + \lambda I (m_i - m_{i \text{ Prior}})\} \quad (8)$$

$$V_i = (B^{-1})^T W_d \delta d \quad (9)$$

۲-۲-۱- محاسبات ماتریس هشین با حضور قطر اصلی شبه

هشین

با توجه به رابطه (۴)، ماتریس هشین برای یک روش نیوتنی استاندارد در هر تکرار به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathcal{H} = \Re\{W_m^{-1} \mathcal{F}^* W_d \mathcal{F} + W_m^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial m^T} \right) (\delta d \dots \delta d) + \lambda I\} \quad (10)$$

در واقع باید بیان کرد که $\mathcal{H}^{-1}$ به عنوان یک پیش شرط ساز عمل می‌کند؛ که دو تصحیح مهم روی گرادیان تابع هزینه انجام می‌دهد:

(الف) اثرات گسترش هندسی در گرادیان تابع هزینه را جبران می‌کند (Shin et al., 2001).

(ب) اثرات باند محدود بودن چشمه‌ی لرزه‌ای را در گرادیان جبران می‌کند (Pratt, 1999).

وقتی که یک پیش شرط ساز مناسب برای گرادیان پیدا شود، آنگاه می‌توان پارامترهای مدل را در هر تکرار به درستی به روز رسانی نمود. اما مشکل اینجاست که محاسبه $\mathcal{H}$ و وارون آن، با توجه به ابعاد مسئله، به حجم سنگینی از محاسبات احتیاج دارد. البته تلاش‌های زیادی روی محاسبه یک پیش شرط ساز مناسب با هزینه محاسباتی کمتر انجام شده است، شامل بهره‌گیری از روش محاسبه شبه هشین (Shin and Min, 2006) و نیز بهره‌گیری از روش شبه نیوتنی L-BFGS (Nocedal, 1980).

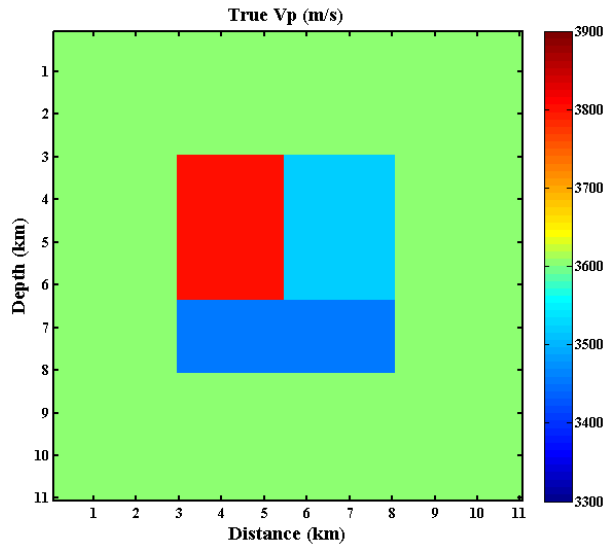
الگوریتم گاوس-نیوتن بیان می‌کند که اگر فرض شود که با تغییر پارامترهای مدل، میزان باقیمانده داده‌ها به صورت خطی تغییر می‌کند، آنگاه می‌توان بخش غیرخطی رابطه (۱۰) را صفر در نظر گرفته و هزینه محاسبات ماتریس هشین را کاهش داد (Treitel and Lines, 1984). در این صورت رابطه (۱۰) به رابطه آتی تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{H}_a = \Re\{W_m^{-1} \mathcal{F}^* W_d \mathcal{F} + \lambda I\} \quad (11)$$

$$\mathcal{H}_a = \Re\{W_m^{-1} (B^{-1} \mathcal{F})^* W_d (B^{-1} \mathcal{F}) + \lambda I\} \quad (12)$$

اما حتی نادیده گرفتن بخش غیرخطی هشین هم باعث کاهش چشم‌گیر بار محاسبات نشد؛ تا این که (Shin et al., 2001).

منابع و امکانات محاسباتی در دسترس در این مقاله چشمه ریکر با فرکانس مرکزی ۱۵ هرتز در نظر گرفته شده است. ابعاد شبکه مدل سازی ۱۱۰×۱۱۰ بوده و فواصل گره‌ها از یکدیگر، ۸ متر به منظور حداقل کردن خطای پاشندگی عددی در مدل سازی مستقیم، محاسبه شده است (Jo et al, 1996).



شکل ۳: مدل سرعت مورد مطالعه در این تحقیق.

در این مطالعه، از ۱۰۸ شات با فواصل یک گره (یعنی فواصل چشمه‌ها معادل ۱۶ متر است) و نیز ۱۰۸ گیرنده با فواصل ۱ گره از یکدیگر (یعنی فواصل گیرنده‌ها معادل ۱۶ متر است) در کرانه‌های مدل بهره برده شده است (شکل ۴). یکی از خصوصیات روش وارون سازی شکل موج کامل این است که می‌تواند برای انواع مختلفی از هندسه چینش گیرنده‌ها و چشمه‌ها مورد استفاده قرار بگیرد (مثلاً چاه به چاه، سطح به سطح و یا سطح به چاه). با توجه به این که این نوع چینش مشابه حالت توموگرافی چاه به چاه مطالعات مهندسی است، انتخاب شده است. داده مشاهده‌ای برای شات اول، مطابق با هندسه‌ی برداشت در شکل ۵، در شکل ۶ آورده شده است. وارون سازی شکل موج کامل آکوستیک در حیطه فرکانس به کمک دو الگوریتم مورد اشاره در عنوان مقاله، برای مدل سرعت معرفی شده (شکل ۳) انجام داده شده است. با توجه به آنچه در بخش تئوری مدل سازی وارون آمده است، میزان بروز رسانی مورد استفاده برای هر دو الگوریتم برای محل هر پارامتر و در هر تکرار، از قرار زیر بوده است:

$$\delta m_i = \text{Real} \left\{ W_m^{-1} \text{diag} \left(F_i^* W_d F_i \right) + \lambda I \right\}^{-1} \text{Real} \left\{ W_m^{-1} F_i^* \left(B^{-1} \right)^* W_d \delta d + \lambda I \left(m_i - m_{i \text{ Prior}} \right) \right\} \quad (22)$$

بدیهی است این رابطه به روز رسانی، در مورد الگوریتم L-BFGS، فقط تا قبل از ورود به فرآیند BFGS حافظه محدود

$$\mathcal{H}^{-1(k+1)} = \left(I - \varrho^{(k)} y^{(k)} s^{(k)T} \right) H^{-1(k)} \left(I - \varrho^{(k)} s^{(k)} y^{(k)T} \right) + y^{(k)} \varrho^{(k)} y^{(k)T} \quad (20)$$

$$\varrho^{(k)} = \frac{1}{y^{(k)T} s^{(k)}} \quad (21)$$

رابطه (۲۰) را می‌توان با الگوریتم بازگشتی دو حلقه‌ای در جدول ۱ محقق نمود (Nocedal, 1980).

جدول ۱: الگوریتم بازگشتی دو حلقه‌ای جهت حل (۲۰).

```

For  $i = \hat{b} - 1, \dots, 0$ 
     $\alpha^{(i)} = \varrho^{(i)} s^{(i)T} \nabla C^{(k)}$  (store  $\alpha^{(i)}$ )
     $\nabla C^{(k)} := \nabla C^{(k)} - \alpha^{(i)} y^{(i)}$ 
End for
 $r = \mathcal{H}_0^{-1(k)} \nabla C^{(k)}$ 
For  $i = 0, \dots, \hat{b} - 1$ 
     $\beta = \varrho^{(i)} y^{(i)T} r$ 
     $r := r + (\alpha^{(i)} - \beta s^{(i)})$ 
End for
 $\mathcal{H}^k \nabla C^{(k)} = r$ 
Return  $r$ 
    
```

مزیت این الگوریتم بازگشتی دو حلقه‌ای این است که محاسبات $\mathcal{H}_0^{-1(k)}$ جدا از آن است و لذا می‌توان $\mathcal{H}_0^{-1(k)}$ را در هر تکرار آزادانه انتخاب کرد. همچنین لازم به ذکر است عملکرد و سرعت همگرایی روش بهینه‌سازی L-BFGS، به داشتن یک تقریب مناسب از هشین واقعی بستگی دارد (Nocedal, 1980).

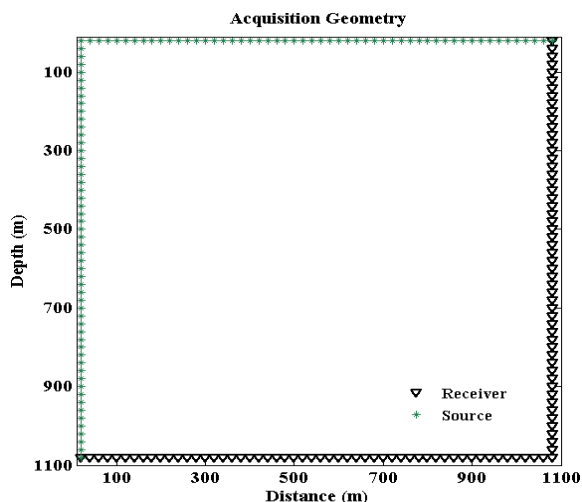
۳- مثال عددی و نتایج

در این بخش با ذکر یک مثال عددی سعی می‌شود که مزایا و معایب عملکردی دو الگوریتم مورد مطالعه را از نظر پیش شرط سازهای گرادیان تابع هزینه‌ی مورد استفاده در آن‌ها، مورد تحقیق قرار داد. مدل سرعت مورد استفاده در مطالعه حاضر (شکل ۳) توسط Bohlen (2015) در یک وارون سازی شکل موج کامل سه‌بعدی آکوستیک مورد استفاده قرار گرفته است.

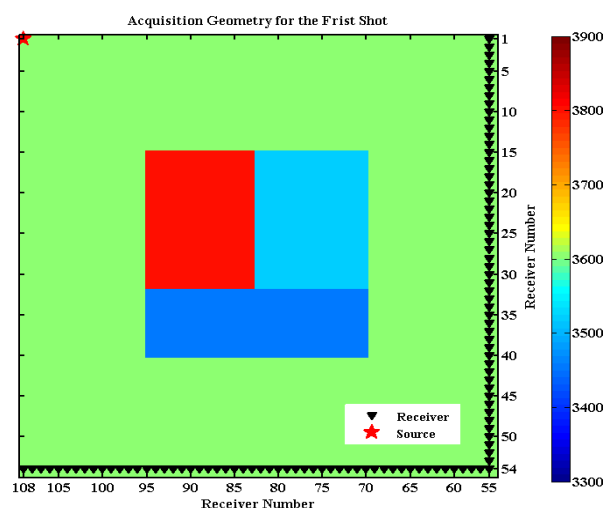
داده واقعی و محاسبه‌ای در مطالعه حاضر، توسط برنامه رایانه‌ای مدل سازی مستقیم در نرم‌افزار متلب، با شرایط جاذب مرزی از نوع ABC مرتبه دوم (جهت جلوگیری از بازتاب‌های ناخواسته‌ی حاصل از دیواره‌های مدل) تولید گردیده است. با توجه به این که مدل سازی به صورت عددی صورت می‌گیرد، نوع چشمه و فرکانس مرکزی آن را می‌توان به صورت دلخواه انتخاب نمود؛ اما اگر فرکانس مرکزی بزرگ انتخاب شود؛ با توجه به ملاحظات عددی در مدل سازی انتشار امواج؛ باید فواصل نقاط گسسته سازی کاهش داده شود؛ که این منجر به افزایش حجم محاسبات می‌شود. با توجه به

نشریه پژوهش‌های ژئوفیزیک کاربردی، دوره ۳، شماره ۱، ۱۳۹۶.

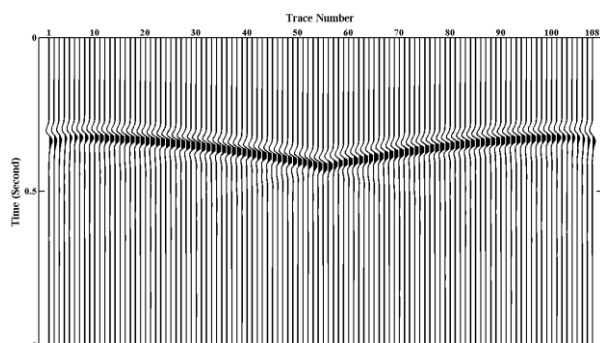
این مطالعه، دارای پردازنده‌ی اینتل هفت هسته‌ای ۲٫۵ گیگاهرتز و نیز ۱۶ گیگابایت رم بوده است.



شکل ۴: هندسه‌ی برداشت داده‌ها.



شکل ۵: نمایش هندسه‌ی برداشت برای شات اول، به روی مدل سرعت مورد مطالعه در این تحقیق.



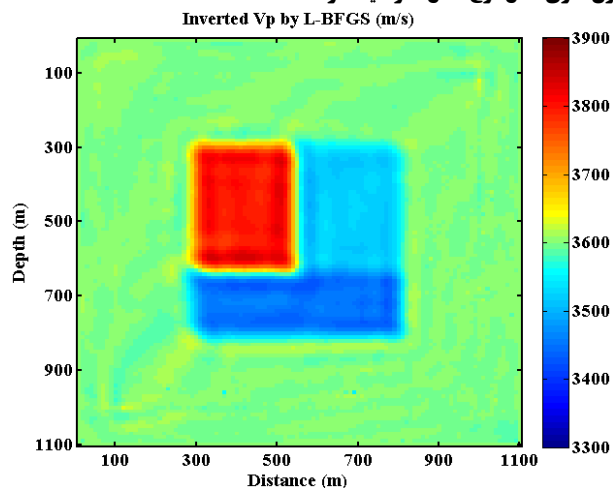
شکل ۶: داده مشاهده‌ای در شات اول.

برقرار است. همچنین در تمام مراحل انجام کار، سعی شده است که تمام پارامترهای مهم برای وارون سازی تا جای ممکن یکسان در نظر گرفته شوند. در الگوریتم L-BFGS، از قطر اصلی ماتریس شبه هشین جهت راه‌اندازی الگوریتم استفاده شده است؛ چون روش L-BFGS جهت شروع، به یک تخمین مناسب از ماتریس هشین نیازمند است. جهت محاسبه طول گام بهینه‌سازی در هر تکرار، از روش جستجوی خط بازگشت به عقب جهت ارضای شرایط ولف و آرمیجو استفاده شده است (Andres Skajaa, 2010). فرکانس‌های حاضر در وارون سازی و تکرارهای متناظر، در جدول ۲ آمده است و در هر دو الگوریتم، به ترتیب از کم به زیاد وارون شده‌اند و نتیجه‌ی هر مرحله به عنوان مدل اولیه مرحله بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نحوه تعیین فرکانس‌ها جهت وارون سازی، با در نظر گرفتن پوشش باند فرکانسی موجک چشمه بوده است. مدل اولیه مورد استفاده برای آغاز فرآیند وارون سازی در هر دو الگوریتم، یک مدل با سرعت ثابت ۳۶۰۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است (شکل ۷). نتایج وارون سازی برای هر دو الگوریتم تحت مطالعه، در شکل ۸ و شکل ۹ نمایش داده شده است. میزان خطای کمی در تخمین پارامترها بین مدل واقعی و مدل نهایی حاصل شده از وارون سازی برای هر دو الگوریتم، در جدول ۳ آمده است. میزان خطای کمی به صورت زیر تعریف شده است:

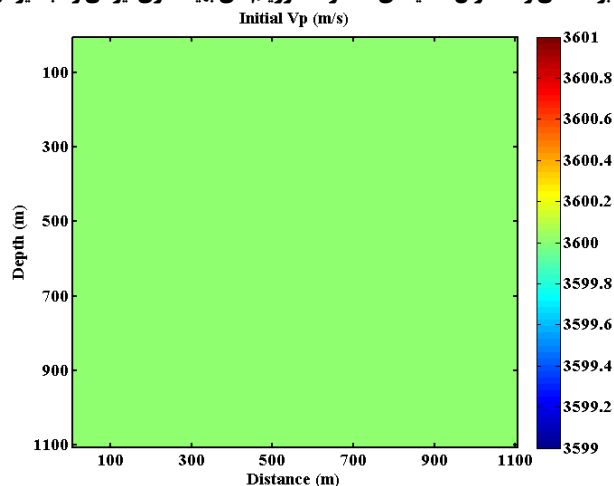
$$\frac{1}{n_m} \left\| \frac{m_{inverted} - m_{true}}{m_{true}} \right\|_2 \quad (23)$$

نتایج وارون سازی در سه فرکانس ۷ هرتز، ۱۵ هرتز و ۲۱ هرتز برای هر دو الگوریتم در شکل ۱۰، شکل ۱۱ و شکل ۱۲ به نمایش درآمده‌اند. مقادیر تابع هدف برای هر دو الگوریتم تحت مطالعه، در سه فرکانس پایین، متوسط و بالا در شکل ۱۳ آمده است. پروفیل عمق-سرعت در مسافت ۳۸۴ متر برای مقایسه سرعت‌های وارون شده، صحیح و اولیه در شکل ۱۴ و شکل ۱۵ آمده است. هر چند بررسی اثر نوفه در دستور کار نبوده است؛ اما بدیهی است برای پایدار کردن الگوریتم نسبت به نوفه باید از منظم سازی استفاده نمود؛ که این امر در تعریف تابع هزینه ارائه شده در مقاله لحاظ شده است و از این‌رو الگوریتم‌های ارائه شده در این مقاله نسبتاً در مقابل نوفه تقویت شده‌اند. با توجه به این‌که هر دو الگوریتم بهینه‌سازی از یک تابع هزینه بهره می‌برند؛ لذا نحوه رفتار هر دو الگوریتم با نوفه به صورت یکسان خواهد بود.

تعداد مسائل پیشرو حل شده برای اجرای الگوریتم شماره یک، ۴۶۸۹۳۶ و برای اجرای الگوریتم شماره دو ۳۰۰۲۴۰ بوده است. زمان مورد استفاده برای تعداد یازده هزار گره و چهل تکرار برای هر فرکانس جهت اجرای الگوریتم شماره یک، یازده ساعت و سی دقیقه و جهت اجرای الگوریتم شماره دو، هفت ساعت و چهل و پنج دقیقه بوده است. همچنین شایان ذکر است که نوع رایانه مورد استفاده در



شکل ۹: نتیجه وارون سازی حاصل از الگوریتم L-BFGS.



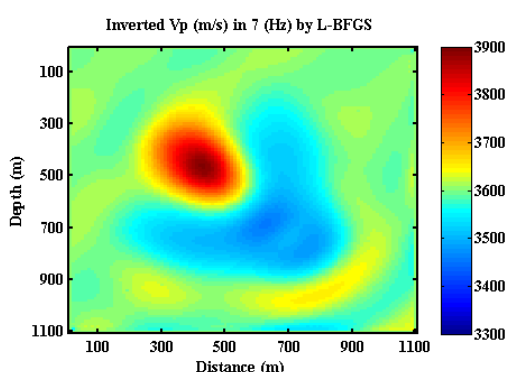
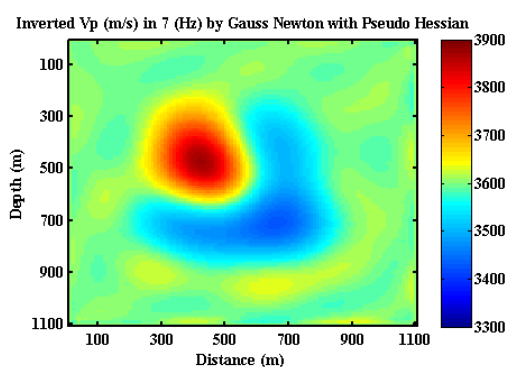
شکل ۷: مدل اولیه سرعت مورد استفاده در هر دو الگوریتم.

جدول ۳: میزان خطای کمی در تخمین پارامتر مدل.

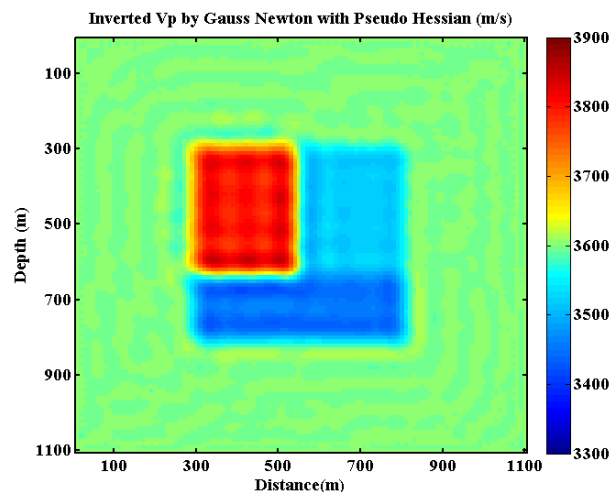
روش	سرعت موج تراکمی
مدل اولیه	1.7434×10^{-4}
الگوریتم گaus-نیوتن	4.5042×10^{-5}
الگوریتم L-BFGS	4.7756×10^{-5}

جدول ۲: فرکانس‌های وارون شده و تکرار متناظرشان.

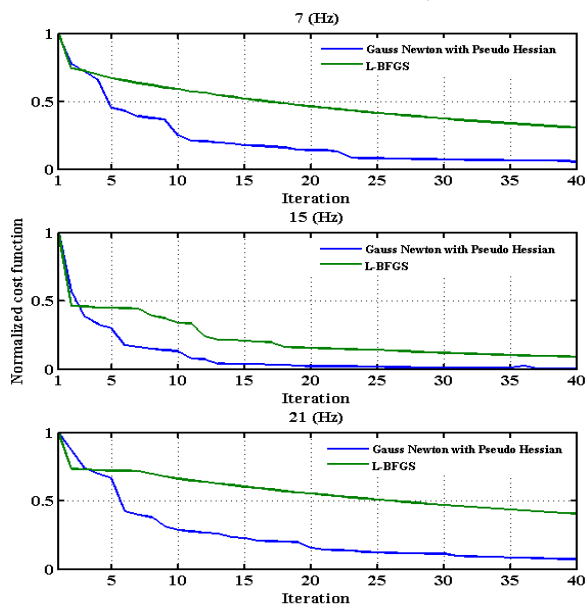
تکرار	فرکانس (هرتز)	تکرار	فرکانس (هرتز)
۴۰	۲۴	۴۰	۶
۴۰	۲۵	۴۰	۷
۴۰	۲۶	۴۰	۱۰
۴۰	۲۷	۴۰	۱۵
۴۰	۲۹	۴۰	۱۹
۴۰	۳۱	۴۰	۲۱



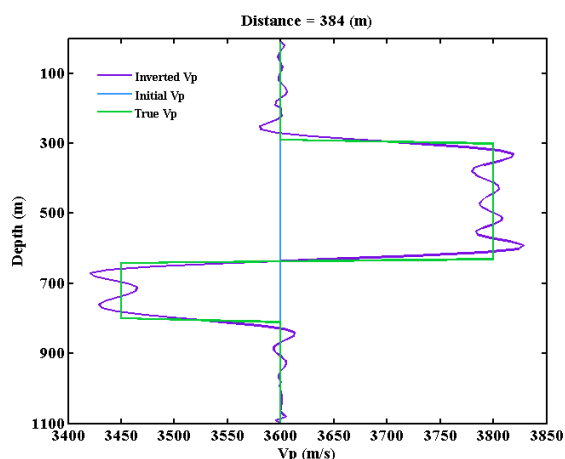
شکل ۱۰: نتیجه وارون سازی در فرکانس ۷ هرتز.



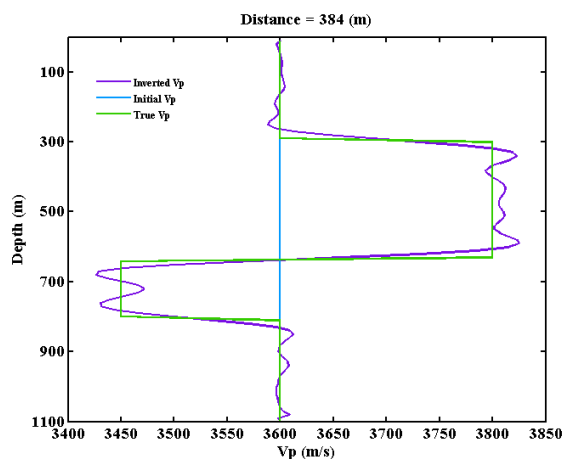
شکل ۸: نتیجه وارون سازی حاصل از الگوریتم گaus-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین.



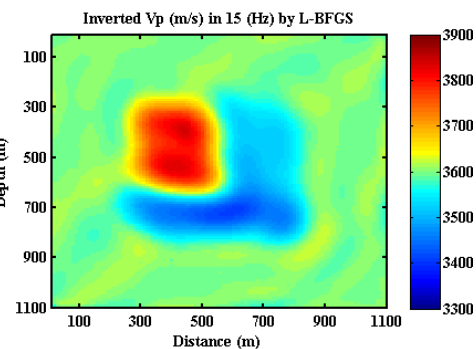
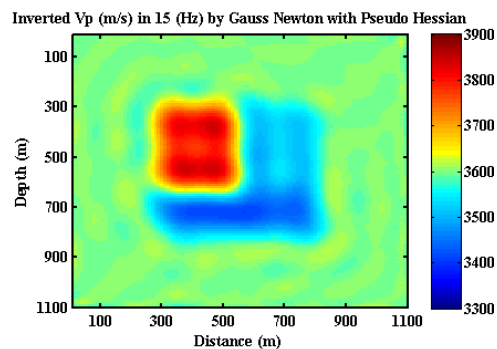
شکل ۱۳: مقایسه مقادیر تابع هدف برای دو الگوریتم تحت مطالعه در سه فرکانس ۷ هرتز، ۱۵ هرتز و ۲۱ هرتز.



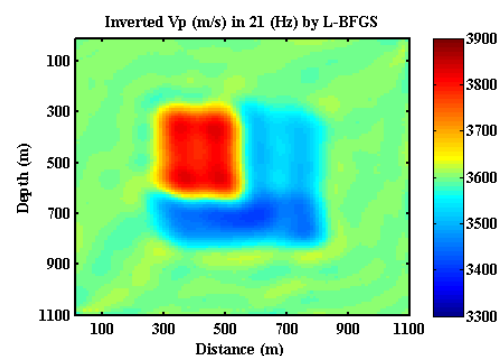
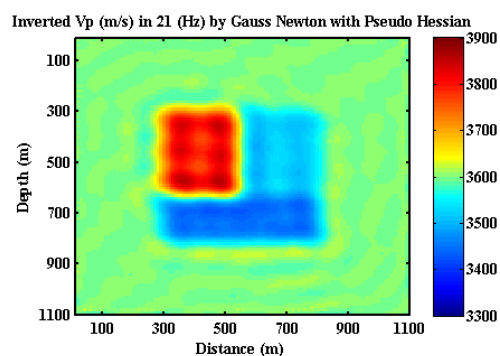
شکل ۱۴: پروفیل عمق - سرعت برای الگوریتم گاوس-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین در مسافت ۳۸۴ متر.



شکل ۱۵: پروفیل عمق - سرعت برای الگوریتم L-BFGS مسافت ۳۸۴ متر.



شکل ۱۱: نتیجه وارون سازی در فرکانس ۱۵ هرتز.



شکل ۱۲: نتیجه وارون سازی در فرکانس ۲۱ هرتز.

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق، دو روش بهینه‌سازی معرفی شده در عنوان مقاله را از نظر عملکرد پیش شرط سازهای گرادیان تابع هزینه‌ی مورد استفاده در آن‌ها، مورد تحقیق قرار دادیم. با نظر به شکل ۸، شکل ۹، شکل ۱۴ و شکل ۱۵ هر دو روش موفق شده‌اند که مدل صحیح را به لحاظ کیفی به خوبی بازسازی نمایند. همچنین با رجوع به جدول ۳ و بررسی کمی عدم تطابق بین مدل صحیح و مدل وارون شده برای هر دو الگوریتم، به این جمع‌بندی می‌رسیم که در ۴۰ تکرار صورت گرفته در مطالعه‌ی حاضر برای فرکانس‌های معرفی شده در جدول ۲، عملکرد الگوریتم گاوس-نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین، در محدوده دقت رایانه مورد استفاده، عملکرد شایسته‌تری بوده است. با نظر به شکل ۱۳ و مقایسه مقادیر تابع هدف برای دو الگوریتم تحت مطالعه در سه فرکانس ۷ هرتز، ۱۵ هرتز و ۲۱ هرتز می‌توان به این جمع‌بندی رسید که در تکرارهای کم، روش گاوس نیوتن با حضور قطر اصلی شبه هشین نسبت به الگوریتم BFGS حافظه محدود برتری دارد؛ که به عنوان دلیل باید به دو نکته اشاره کرد:

الف) سرعت همگرایی مرتبه دوم الگوریتم گاوس نیوتن در مقابل سرعت همگرایی سوپر خطی الگوریتم L-BFGS.

ب) حجم اطلاعات خوبی روی قطر اصلی بخش خطی ماتریس هشین تابع هزینه جهت پیش شرط سازی گرادیان قرار دارد.

لازم به ذکر است که با افزایش تعداد تکرارها با توجه به اینکه ماتریس هشین برآورد شده در الگوریتم L-BFGS، بسیار دقیق‌تر است (چون شامل بخش خطی و غیرخطی ماتریس هشین است). پس می‌توان انتظار داشت که به دلیل اصلاح مناسب‌تر گرادیان تابع هزینه، به نتایج بهتری از نظر کاهش مقادیر تابع هزینه نیز رسید.

در صورتی که مدل مورد بررسی در فرآیند وارون سازی شکل موج کامل، یک مدل پیچیده باشد، باید انتظار مواجهه با تابع هزینه‌ای ناهموارتر را داشت. پیش شرط سازی گرادیان در این حالت، مسلماً کاری دشوارتر است؛ چرا که با یک هشین ظریف‌تر روبرو خواهیم بود. از این‌رو، در حالت مدل‌های پیچیده، پیش شرط سازی، تنها با قطر اصلی ماتریس شبه هشین کاری بسی دشوار است و لذا لزوم استفاده از روش شبه نیوتنی L-BFGS نمایان می‌گردد.

در خصوص مقایسه‌ی بار محاسباتی دو الگوریتم از لحاظ تعداد مسائل مستقیم حل شده و نیز زمان در محاسبه‌ی جهت جستجو، روش L-BFGS برتری خوبی را نشان می‌دهد.

۵- فهرست نمادها

نماد	واحد	شرح
P	N/m ²	میدان موج فشاری
K	N/m ²	مدول بالک
ρ	Kg/m ²	چگالی
ω	Rad/s	فرکانس زاویه‌ای
S	-	بردار چشمه لرزه‌ای
Δ	-	اپراتور لاپلاسین
B	-	ماتریس امپدانس
P	-	ماتریس میدان موج فشاری
c	m/s ²	سرعت موج تراکمی
m	-	بردار پارامتر مدل سرعت
k	-	تکرار
i	-	موقعیت مکانی iام
C(m)	-	تابع هزینه
δd	-	بردار باقیمانده داده‌ها
W_d	-	ماتریس وزن دهی داده‌ها
W_m	-	ماتریس کواریانس در فضای مدل
λ	-	پارامتر منظم سازی
Υ	-	طول گام بهینه‌سازی
$\dagger$	-	عملگر ترانپوز
m_{prior}	m/s ²	بردار پارامتر مدل مرجع
n_m	-	تعداد پارامترهای مدل
$\mathcal{H}$	-	ماتریس هشین دقیق
$\mathcal{H}_a$	-	ماتریس تقریب هشین
$\mathcal{H}_p$	-	ماتریس شبه هشین
$\mathcal{H}_0$	-	ماتریس هشین اولیه در L-BFGS
δm	-	بردار باقیمانده پارامتر مدل
$\mathcal{J}$	-	ماتریس ژاکوبی
V	-	میدان موج به عقب انتشار داده شده
$\mathcal{F}$	-	بردار چشمه مجازی
b	-	پارامتر L-BFGS
T	-	عملگر ترانپوز
s	-	بردار تفاضلی پارامترهای مدل متوالی
y	-	بردار تفاضلی گرادیان‌های متوالی
m_{true}	-	بردار پارامتر مدل صحیح
$m_{inverted}$	-	بردار پارامتر مدل وارون شده
$\ \cdot\ _2$	-	عملگر نرم ۲

۶- منابع

- امینی، ن. و جواهریان، ع.، ۱۳۸۹، مدل‌سازی انتشار امواج در محیط اکوستیکی دو بعدی به روش تفاضل متناهی در حیطه فرکانس، مجله ژئوفیزیک ایران، ۴، ۱-۱۶.
- امینی، ن. و جواهریان، ع.، ۱۳۹۰، توموگرافی شکل موج با استفاده از روش زیر فضای تعمیم‌یافته، رساله دکتری، مؤسسه ژئوفیزیک

- Hanke, M. and Hansen, P.C., 1993, Regularization methods for large-scale problems, *Surveys on Mathematics for Industry*, 3, 253-315.
- Hansen, C., 1998, Rank-deficient and discrete ill-posed problems- Numerical aspects of linear inversion. Society for Industrial and Applied Mathematics, Mathematical modeling and Computation.
- Hu, W., Abubakar, A., Habashy, T.M. and Liu, J., 2011, Preconditioned non-linear conjugate gradient method for frequency domain full-waveform seismic inversion, *Geophysical Prospect*, 59, 477-491.
- Jeong, W., Lee, H. and Min, D., 2012, Full waveform inversion strategy for density in the frequency domain, *Geophysics. J. Int.*, 188, 1221-1242.
- Jo, C.H., Shin, C. and Suh, J.H., 1996, An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space 2D scalar extrapolator, *Geophysics*, 61, 529-537.
- Kabanikhin, S.I., 2008, *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, De Gruyter, Berlin-Boston.
- Kamei, R. and Pratt, R.G., 2013, Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion, *Geophysical Journal International*, 194 (2), 859-884.
- Kim, Y., Cho, H., Min, D.J. and Shin, C., 2011, Comparison of frequency-selection strategies for 2D frequency-domain acoustic waveform inversion, *Pure Appl. Geophys*, 168, 1715-1727.
- Lailly, P., 1983, The seismic problem as a sequence of before-stack migrations. In Bednar, J., editor, *Conference on Inverse Scattering: Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia.
- Lines, L.R. and Treitel, S., 1984, A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems, *Geophysical Prospecting*, 32, 159-186.
- Marfurt, K.J., 1984, Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations, *Geophysics*, 49, 553-549.
- Mora, P.R., 1989, Inversion = migration + tomography, *Geophysics*, 54 (12), 1575-1586.
- Narayanan, R.M. and Meng, J., 1998, Second order absorbing boundary conditions for tlm analysis of open region scattering problems, *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 19 (4), 651-671.
- Nocedal, J. and Wright, S.J., 1999, *Numerical optimization*, Springer.
- Nocedal, J., 1980, Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage, *Mathematics of Computation*, 35 (151): 773-782.
- Operto, S., Gholami, Y., Prioux, V., Ribodetti, A., Brossier, R., Metivier, L. and Virieux, J., 2013, A
- Anagaw, A.Y. and Sacchi, M.D., 2012, Full waveform inversion with simultaneous sources using the full newton method, Chapter 531, pp. 1-5.
- Asnaashari, A., Brossier, R., Garambois, S., Audebert, F., Thore, P. and Virieux, J., 2013, Regularized seismic full waveform inversion with prior model information, *Geophysics*, 78, R25-R36.
- Backus, G.E. and Gilbert, J.F., 1967, Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems, *Geophysics, J, R, Astron. Soc.*, 13, 247-76.
- Bohlen, T., Nil, D.D., Köhen, D. and Jetschny, S., 2015, SOFI3D- Seismic Modeling with Finite differences, 3D-acoustic and viscoelastic version- User Guide.
- Brenders, A.J. and Pratt, R.G., 2007a, Efficient waveform tomography for lithospheric imaging: Implications for realistic 2D acquisition geometries and low frequency data, *Geophysical Journal International*, 168, 152-170.
- Brenders, A.J. and Pratt, R.G., 2007b, Full waveform tomography for lithospheric imaging: results from a blind test in a realistic crustal model, *Geophysical Journal International*, 168, 133-151.
- Brossier, R., 2011, Two-dimensional frequency-domain visco-elastic full waveform inversion: Parallel algorithms, optimization and performance, *Computers & Geosciences*, 37 (4), 444-455.
- Brossier, R., Operto, S. and Virieux, J., 2009a, 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion for imaging complex onshore structures. In *Expanded Abstracts*, Page U019, EAGE.
- Brossier, R., Operto, S. and Virieux, J., 2009b, Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion, *Geophysics*, 74 (6), WCC63-WCC76.
- Dessa, J., Operto, S., Kodaira, S., Nakanishi, A., Pascal, G., Virieux, J. and Kaneda, Y., 2004, Multiscale seismic imaging of the eastern Nankai trough by full waveform inversion, *Geophysics. Res. Lett.*, 31, L18606.
- Epanomeritakis, I., Akçelik, V., Ghattas, O. and Bielak, J., 2008, A Newton-CG method for large-scale three-dimensional elastic full waveform seismic inversion, *Inverse Problems*, 24, 1-26.
- Fichtner, A., Kennett, B.L.N., Igel, H. and Bunge, H.P., 2009, Full seismic waveform tomography for upper-mantle structure in the Australian region using adjoint methods, *Geophysical Journal*, 179 (3), 1703-1725.

- characterization by 2D elastic full-waveform inversion, *Geophysics*, 76, R81-R93.
- Sen, M.K. and Stoffa, P.L., 2013, *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*, Volume 4, 1st Edition, Cambridge.
- Shin, C. and Min, D.J., 2006, Waveform inversion using a logarithmic wavefield, *Geophysics*, 71, R31-R42.
- Shin, C., Jang, S. and Min, D.J., 2001a, Improved amplitude preservation for pre-stack depth migration by inverse scattering theory, *Geophysical Prospecting*, 49, 592-606.
- Shipp, R.M. and Singh, S.C., 2002, Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data, *Geophysics. J. Int.*, 151, 325-344.
- Sirgue, L. and Pratt, R.G., 2004, Efficient waveform inversion and imaging: a strategy for selecting temporal frequencies, *Geophysics*, 69 (1), 231-248.
- Sirgue, L., Barkved, O.I., Dellinger, J., Etgen, J., Albertin, U. and Kommedal, J.H., 2010, Full waveform inversion: the next leap forward in imaging at Valhall, *First Break*, 28, 65-70.
- Sun, R. and McMechan, G., 1992, 2D full-wavefield inversion for wide-aperture, elastic, seismic data, *Geophysical Journal International*, 111, 1-10.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic-reflection data in the acoustic approximation, *Geophysics*, 49 (8), 1259-1266.
- Tarantola, A., 1987, *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, Amsterdam, 613 P.
- Vigh, D., Starr, W., Kapoor, J. and Li, H., 2010, 3D full waveform inversion on a Gulf of Mexico WAZ data set in *Proceedings of the 80th SEG Annual Meeting*, Expanded Abstracts, Denver, pp. 957-961.
- Virieux, J. and Operto, S., 2009, An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics, *Geophysics*, 74 (6), WCC1-WCC26.
- guided tour of multiparameter full-waveform inversion with multicomponent data: From theory to practice, *The Leading Edge*, 32 (9), 1040-1054.
- Plessix, R.E. and Perkins, C., 2010, Full waveform inversion of a deep water ocean bottom seismometer dataset, *First Break*, 28, 71-78.
- Plessix, R.E., 2006, A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications, *Geophys. J. Int.*, 167, 495-503.
- Plessix, R.E., 2009, Three-dimensional frequency-domain full-waveform inversion with an iterative solver, *Geophysics*, 74 (6), WCC53-WCC61.
- Pratt, R.G. and Shipp, R.M., 1999, Seismic waveform inversion in the frequency domain, part II: Fault delineation in sediments using cross-hole data, *Geophysics*, 64, 902-914.
- Pratt, R.G. and Worthington, M.H., 1990, Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography, part 1 acoustic wave-equation method, *Geophys. Prospect.*, 38, 287-310.
- Pratt, R.G., 1990, Frequency-domain elastic modeling by finite differences: a tool for cross-hole seismic imaging, *Geophysics*, 55 (5), 626-632.
- Pratt, R.G., 1999, Seismic waveform inversion in the frequency domain, part I: theory and verification in a physis scale model, *Geophysics*, 64, 888-901.
- Prieux, V., Brossier, R., Operto, S. and Virieux, J., 2013, Multi-parameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom-cable data from the Valhall field. Part 1: imaging compressional wave speed, density and attenuation, *Geophysics. J. Int.*, 194 (3), 1640-1664.
- Ravaut, C., Operto, S., Imbrota, L., Virieux, J., Herrero, A. and Dell'Aversana, P., 2004, Multi-scale imaging of complex structures from multi- old wide-aperture seismic data by frequency-domain full-wavefield inversions: application to a thrust belt, *Geophysical Journal International*, 159, 1032-1056.
- Romdhane, A., Grandjean, G., Brossier, R., Rejiba, F., Operto, S. and Virieux, J., 2011, Shallow structure



Performance comparison of Newton and quasi-Newton methods in frequency-domain acoustic full waveform inversion for a synthetic model

Siamak Abolhassani^{1*}, Navid Amini² and Hamid Reza SiahKoochi³

1- M.Sc. Student, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Assistant Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

3- Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

Received: 24 July 2016; Accepted: 1 January 2017

Corresponding author: sabolhassani@ut.ac.ir

Keywords

Seismic Imaging
Acoustic Full Waveform Inversion
Nonlinear Optimization
Gauss-Newton Optimization
Quasi-Newton Optimization
Limited Memory-BFGS
Pseudo Hessian

Extended Abstract

Summary

Today, the significance of the velocity model estimation in seismic migration as well as time to depth conversion of seismic sections is very clear to every geophysicist. From a practical point of view, approaches such as well logging techniques or direct observations cannot provide a reliable description of regional scale physical properties of the earth. Seismic imaging is a tool to describe the earth physical properties. Today, one of the imaging techniques, which is highly welcomed by geoscientists is the full waveform inversion (FWI). The full waveform inversion - an efficient method in seismic imaging -

uses all available information in the seismograms, including the amplitude, phase, and the first arrival time so as to judge the physical properties of the earth. In fact, FWI is represented as an optimization problem by defining a misfit function, which measures differences between the observed waveforms and the computed waveforms. In FWI, the size of the model space parameters will not allow us using global minimization algorithms. Therefore, we minimize the misfit function by local optimization methods. A waveform inversion problem is usually solved repetitively by the gradient-based solutions. In this paper, we have compared two gradient optimization algorithms of Gauss-Newton algorithm based on the main diagonal of the pseudo Hessian matrix (GN-DPH) and the limited memory-BFGS (L-BFGS). Although the L-BFGS does not need the computation of Hessian matrix, but according to the numerical tests on synthetic models, we have found that GN-DPH algorithm results are more accurate than L-BFGS after 40 iterations.

Introduction

From a general point of view, in oil and gas exploration, approaches for delineating physical properties of the earth can be divided into direct solutions and indirect solutions. In large scale seismic problems, we have to focus on indirect solutions. Consequently, we use imaging techniques to extract desired parameters of the earth. There are various approaches for the imaging and estimations of the earth elastic parameters. FWI is one of efficient imaging techniques, which has become popular recently in seismic communities.

Methodology and Approaches

We have compared one of Newton-based methods, namely Gauss-Newton based on the main diagonal of the pseudo Hessian Matrix (GN-DPH), and the limited memory-BFGS (L-BFGS). For the forward modeling, we have solved 2D acoustic wave equation using finite-difference approximation equipped with a second order absorbing boundary condition in the frequency domain. To estimate the gradient vector efficiently, the adjoint-state method (Plesseix, 2006) has been used. In the GN-DPH algorithm, a method developed by Shin et al. (2006) has been applied in order to compute the Hessian matrix, and in the L-BFGS algorithm, we have followed a preconditioned L-BFGS approach developed by Nocedal (1980). In the numerical example, the performance of the aforementioned algorithms has been examined.

Results and Conclusions

By comparison of the two reviewed optimization methods in terms of the gradient pre-conditioners, we found that both methods succeeded to estimate the true velocity model. Analyzing the model estimation error revealed that the GN-

DPH method was more efficient than the L-BFGS during the first 40 iterations performed in the study. Decreasing the normalized misfit function values showed the advantage of GN-DPH algorithm over the L-BFGS. There is two justifications for this fact: First, the convergence rate for the GN-DPH is of a second-order, whereas that of the L-BFGS is super-linear. Second reason is valuable information, which exists on the main diagonal of the linear part of the Hessian matrix that acts as pre-conditioner in the GN-DPH algorithm. On the other hand, it should be noted that by increasing the number of iterations, better results can be expected due to the fact that the Hessian matrix includes both linear and nonlinear parts and is more accurate than the other investigated method. It is also interesting to note that by increasing the complexity of a true model, we will definitely encounter a more nonlinear misfit function, which needs a more efficient Hessian for preconditioning the gradient vector where the importance of L-BFGS algorithm will be highlighted there.
