JRAG
نشریه پژوهش های ژئوفیزیک کاربردی
دانشگاه صنعتی شاهرود
انجمن ژئوفیزیک ایران - ۱۳۵۴
Iranian Geophysical Society - 1975
دوره ۸، شماره ۱، ۱۴۰۱، صفحات ۶۱-۷۷
شناسه دیجیتال (DOI): 10.22044/JRAG.2022.12000.1334

وارون‌سازی توأمان سه‌بعدی داده‌های گرانی و مغناطیس با استفاده از پایدارکننده تغییرات کلی و قید گرادیان متقاطع

مهدی چهارپاشلو[۱]، سعید وطن‌خواه[۲*] و مصطفی قارلقی[۳]

۱- دانشجوی کارشناسی‌ارشد ژئوفیزیک، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران.
۲- استادیار؛ گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران.
۳- دانشجوی دکترا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران.

دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۲۴؛ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۰۲

* نویسنده مسئول مکاتبات: ***svatan@ut.ac.ir***

چکیده

در این مقاله الگوریتمی برای وارون‌سازی توأمان داده‌های گرانی و مغناطیس با استفاده از پایدارکننده ناهمسانگرد تغییرات کلی و قید گرادیان متقاطع توسعه داده‌شده است. پایدارکننده ناهمسانگرد تغییرات کلی با کاربرد جداگانه نُرم یک‌بر مشتق پارامترهای مدل در سه جهت مختصاتی حاصل می‌گردد. استفاده از این نوع پایدارکننده سبب می‌شود که در مدل‌های بازسازی‌شده، لبه‌های ساختار زیرسطحی حفظ‌شده و مدل‌هایی متمرکز حاصل شوند. همچنین، ناپیوستگی‌های موجود در ساختارهای زیرسطحی بهتر آشکار می‌گردد. ارتباط بین پارامترهای مختلف مدل، تباین چگالی و خودپذیری مغناطیسی، توسط قید گرادیان متقاطع برقرار می‌شود. این قید از هندسه مدل‌ها برای جفت‌شدگی مدل‌های متفاوت استفاده می‌کند، بنابراین، باعث افزایش شباهت ساختاری بین مدل‌های بازسازی‌شده می‌شود. این بدان معنی است که اطلاعات موجود در هر دو داده گرانی و مغناطیسی به‌طور هم‌زمان مورداستفاده قرارگرفته است. لذا عدم قطعیت جواب حاصل از وارون‌سازی کاهش‌یافته و اطمینان بیشتری بر نتایج حاصل وجود دارد؛ بنابراین تفسیر چنین نتایجی ساده‌تر خواهد بود. الگوریتم توسعه داده‌شده بر روی دو مدل مصنوعی متفاوت آزمایش می‌گردد. نتایج به روشنی دلالت بر کارایی روش ارائه‌شده دارند. در نهایت داده واقعی جمع‌آوری شده بر روی دو لوله کیمبرلیت در ناحیه اوراپا کشور بوتسوانا مورداستفاده و مدل‌سازی قرارگرفته است. این ناحیه یکی از مناطق مهم تولید الماس در جهان می‌باشد. مدل‌های بازسازی‌شده به‌خوبی توزیع خاصیت فیزیکی، هندسه، گسترش جانبی و عمق هر دو لوله کیمبرلیت را نشان می‌دهند. این نتایج انطباق خوبی با زمین‌شناسی منطقه و اطلاعات گمانه‌های موجود دارند.

واژگان کلیدی

وارون‌سازی توأمان
پایدارکننده تغییرات کلی
گرادیان متقاطع
گرانی
مغناطیس

۱- مقدمه

روش‌های ژئوفیزیکی به دنبال آن هستند که بامطالعه ساختارهای زیرسطحی و توزیع خواص فیزیکی آن‌ها مانند چگالی، خودپذیری مغناطیسی، سرعت امواج لرزه‌ای و خصوصیات الکتریکی، تصویری از توزیع این خواص و هندسه مربوط به ساختارهای زیرسطحی، با توجه به داده برداشت‌شده، فراهم آورند. ازجمله کاربردهای اولیه این دسته از مطالعات می‌توان به شناخت ساختارهای زمین اعم از هسته، گوشته و پوسته اشاره کرد که تحولاتی عمیق در علوم زمین پدید آورد. باگذشت زمان و پیشرفت علم در شاخه‌های ریاضی، فیزیک و زمین‌شناسی، محققان پای فراتر نهادند و به کاربردهایی بیشتر و اقتصادی‌تر از این دسته مطالعات پرداختند که از آن جمله می‌توان به اکتشافات هیدروکربنی، منابع معدنی و فلزی، آب‌های زیرزمینی، مطالعات مدیریت بحران و ... اشاره کرد.

در اکتشافات ژئوفیزیکی، پس از برداشت داده‌ها و پردازش آن‌ها، تفسیر بی‌هنجاری‌های به‌دست‌آمده موردنظر است. روش‌های تفسیر در ژئوفیزیک غالباً به سه دسته تقسیم‌بندی می‌شوند (Blakely 1996): الف) روش‌های بهبود و نمایش داده، ب) مدل‌سازی پیشرو، و ج) وارون-سازی. با توسعه رایانه‌های پیشرفته و نیز الگوریتم‌های توانمند، وارون‌سازی داده‌ها در سال‌های اخیر اهمیت و کاربرد فراوانی در تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی یافته است. بسته به تنوع داده‌های موجود در ناحیه موردبررسی، می‌توان از وارون‌سازی صرفاً یک نوع داده (وارون‌سازی جداگانه) و یا از وارون‌سازی هم‌زمان دو و یا چند نوع داده متفاوت (وارون‌سازی توأمان) استفاده کرد. وارون‌سازی جداگانه و مبتنی بر یک مجموعه داده، صرفاً اطلاعاتی در مورد توزیع یک نوع پارامتر فیزیکی در اختیار مفسر قرار می‌دهد. درصورتی‌که شرایط و امکانات فراهم باشد، استفاده هم‌زمان از دو یا چند نوع داده می‌تواند اطلاعات مفیدتری از سطح زیرین فراهم آورد. بنابراین وارون‌سازی توأمان روشی مؤثر برای کاهش عدم یکتایی موجود در مسائل وارون ژئوفیزیکی می‌باشد.

در الگوریتم‌های وارون‌سازی توأمان، داده‌های مختلف به‌طور هم‌زمان در یک الگوریتم وارون‌سازی واردشده و با توجه به وابستگی مستقیم و یا غیرمستقیم بین پارامترهای مدل مختلف، الگوریتم با محدود کردن فضای مدل به سمت حصول نتایجی می‌رود که تمامی داده‌ها و پارامترهای مدل را موردنظر قرار دهد. در این صورت است که عدم یکتایی جواب تا حدی کاهش‌یافته و نتایج بهتری در اختیار مفسر قرار می‌گیرد؛ بنابراین استفاده از الگوریتم‌های وارون‌سازی توأمان، به همراه پایدار کننده‌ها و قیود مناسبی که با توجه به ساختار موردنظر انتخاب می‌گردند، در تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی رو به افزایش است. امروزه الگوریتم‌های متفاوتی در وارون‌سازی توأمان داده‌های ژئوفیزیکی کاربرد دارند. در یک تقسیم‌بندی کلی می‌توان غالب این الگوریتم‌ها را در یکی از دو دسته کلی زیر قرار داد (Gallardo & Meju 2004) : الف) روش‌هایی که بر اساس یک رابطه مستقیم بین پارامترهای فیزیکی مورد جستجو توسعه داده‌شده‌اند، و ب) روش‌هایی که دربرگیرنده استفاده از ویژگی‌های ساختاری چشمه‌های زیرسطحی به‌عنوان یک عامل مشترک میان مدل‌های ژئوفیزیکی می‌باشند. هنگامی‌که اطلاعات دقیقی از رابطه بین پارامترهای مختلف مدل در دسترس باشد، طبیعتاً دسته نخست نتایج بهتری ارائه می‌کنند. به‌هرحال فراهم کردن چنین اطلاعاتی برای کل ناحیه موردبررسی دشوار و گاهی غیرممکن است. در شیوه وارون-سازی‌های توأمان به کمک ویژگی‌های ساختاری، درواقع از هندسه مدل‌ها جهت افزایش شباهت ساختاری بین مدل‌های بازسازی‌شده استفاده می‌شود (Haber & Oldenburg 1997; Gallardo & Meju 2003, 2004). پرکاربردترین قید مورداستفاده در این دسته، قید گرادیان متقاطع می‌باشد. ایده اصلی این شیوه آن است که تغییرات خصوصیات فیزیکی در مدل‌های مختلف بایست در یک محل اتفاق بیفتد، یا آنکه تغییرات دریکی از مدل‌ها صفر باشد. بنابراین مدل‌های ساخته‌شده تا حد امکان شبیه یکدیگر خواهند بود. پژوهش‌های متعددی در حوزه وارون‌سازی توأمان با استفاده از قید گرادیان متقاطع انجام‌شده است (Gallardo & Meju 2003, 2004; Tryggvason & Linde 2006;Gallardo 2007; Fregoso & Gallardo 2009; Haber & Holtzman Gazit 2013; Vatankhah et al. 2022). در تحقیق حاضر فرض بر آن است که توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی برای ساختارهای زیرسطحی دارای هندسه مشابه‌ای می‌باشند. بنابراین قید گرادیان متقاطع برای جفت‌شدگی این پارامترها مورداستفاده قرار می‌گیرد.

در تمامی الگوریتم‌های وارون‌سازی، حصول جواب‌های باکیفیت نیازمند استفاده از پایدار کننده‌های مناسب است. پایدارکننده در الگوریتم وارون‌سازی برای منظم کردن جواب و کاهش اثر نوفه بر مدل بازسازی‌شده به کار می‌رود. علاوه بر آن، برخی مشخصات مورد انتظار برای مدل زیرسطحی نیز توسط پایدارکننده به مساله اعمال می‌گردد. پایدار کننده‌های مختلفی در مسائل وارون ژئوفیزیکی توسعه داده‌شده‌اند. به‌عنوان نمونه هنگامی‌که صرفاً بازسازی مشخصات اصلی ساختارهای زیرسطحی موردنظر باشد (جزئیات موردنیاز نباشد) می‌توان از پایدار-کننده با بیشینه هموارشدگی (maximum smoothness stabilizer) استفاده کرد. این پایدارکننده درواقع از کمینه کردن نُرم دو مشتق پارامترهای مدل حاصل می‌شود (Li & Constable et al. 1987; Oldenburg 1996; Pilkington 1997). از سوی دیگر کاربرد نُرم یک و نُرم صفر[1] برای مشتق پارامترهای مدل به ترتیب به پایدار کننده‌های تغییرات کلی (Total Variation) و کمینه گرادیان (minimum gradient support) منجر خواهد شد. این دو پایدارکننده، مدل‌های متمرکز با جزئیات بیشتر تولید کرده و همچنین لبه‌های ساختارهای

۱- نُرم صفر از لحاظ ریاضی نُرم محسوب نمی‌شود. این نُرم در واقع به معنی تعداد عناصر غیر صفر در یک بردار است. کمینه کردن یک بردار با نُرم صفر سبب می‌گردد که تعداد عناصر غیر صفر آن کمینه گردد. در ژئوفیزیک، این نُرم برای تولید مدل‌های فشرده و تُنُک استفاده می‌گردد.

زیرسطحی را بهتر آشکار می‌کنند. رویکردی یکپارچه از کاربرد پایدار کننده‌های مختلف در الگوریتم وارون‌سازی جداگانه در Vatankhah et al. (2020) ارائه‌شده است. در تحقیق حاضر پایدارکننده تغییرات کلی در الگوریتم وارون‌سازی توأمان مورداستفاده قرار می‌گیرد. بنابراین مدل‌های ساخته‌شده متمرکز بوده و لبه‌های ساختار زیرسطحی حفظ می‌گردند.

در ادامه، بخش ۲، تئوری روش وارون‌سازی توأمان داده‌های گرانی و مغناطیس بر اساس قید گرادیان متقاطع و پایدارکننده تغییرات کلی به‌تفصیل توضیح داده خواهد شد. همچنین در این بخش شیوه کمینه‌سازی تابع هدف کلی و نیز نحوه تعیین پارامترهای تنظیم در فرآیند وارون‌سازی بیان‌شده است. در بخش ۳، نتایج حاصل از کاربرد الگوریتم بر روی دو مدل مصنوعی متفاوت ارائه می‌گردد. بخش ۴، اختصاص به وارون‌سازی توأمان داده‌های گرانی و مغناطیس برداشت‌شده بر روی معادن کیمبرلیت اوراپا در بوتسوانا دارد.

۲- تئوری روش

سطح زیرین در ناحیه برداشت داده به وسیله n مکعب با هندسه ثابت گسسته سازی می‌شود. خاصیت فیزیکی ناشناخته مربوط به این مکعب‌ها، تغییرات چگالی و خودپذیری مغناطیسی، مورد جستجو است. با فرض آن‌که m داده بر روی سطح برداشت‌شده باشد، با صرف‌نظر کردن از مغناطیس بازماند، رابطه خطی بین بردار پارامترهای مدل و بردار داده‌های مربوطه، گرانی و مغناطیس، به‌صورت زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{obs}} = \mathrm{G}_i \boldsymbol{m}_i, \quad i = 1, 2. \qquad (۱)$$

در این رابطه اندیس $i=1$ برای داده‌های گرانی و اندیس $i=2$ برای داده‌های مغناطیس در نظر گرفته می‌شود. وارون‌سازی توأمان برای این دو مجموعه داده را می‌توان به‌صورت کمینه کردن یک تابع هدف کلی به‌صورت رابطه زیر بیان کرد:

$$P^{(\alpha,\lambda)}(\boldsymbol{m}) = \left\| \mathrm{W_d}(\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} - \mathrm{G}\boldsymbol{m}) \right\|_2^2 + \alpha^2 \left(\sum_{j=x,y,z} \left\| \begin{bmatrix} \mathrm{D_j} & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & \mathrm{D_j} \end{bmatrix} (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}}) \right\|_1 \right) + \lambda^2 \|\boldsymbol{t}\|_2^2$$

(۲)

در این رابطه ماتریس G متشکل از دو ماتریس G_1 و G_2 به شکل زیر است:

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_1 & \\ & \mathrm{G}_2 \end{pmatrix} \in R^{2m\times 2n}.$$

بردار $\boldsymbol{m}$ شامل پارامترهای مدل مجهول، $\boldsymbol{m}_1$ و $\boldsymbol{m}_2$، و بردار $\boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}}$ مدل‌های اولیه را در بر دارد:

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 \\ \boldsymbol{m}_2 \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^{\mathrm{apr}} \\ \boldsymbol{m}_2^{\mathrm{apr}} \end{bmatrix} \in R^{2n}.$$

و بردار $\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$ داده‌های مشاهده‌ای را شامل می‌شود:

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1^{\mathrm{obs}} \\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{obs}} \end{bmatrix} \in R^{2m}.$$

در رابطه (۲)، عبارت‌های $\left\| \mathrm{W_d}(\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} - \mathrm{G}\boldsymbol{m}) \right\|_2^2$ عدم انطباق داده وزن‌دار، $\left(\sum_{j=x,y,z} \left\| \begin{bmatrix} \mathrm{D_j} & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & \mathrm{D_j} \end{bmatrix} (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}}) \right\|_1 \right)$ عبارت‌های تنظیم نُرم یک و $\|\boldsymbol{t}\|_2^2$ قید گرادیان متقاطع می‌باشد. همچنین در این رابطه، $\mathrm{W_d}$ ماتریس وزن‌دهی داده‌ها متشکل از ماتریس‌های قطری $\mathrm{W_{d_1}}$ و $\mathrm{W_{d_2}}$ می‌باشد. با فرض توزیع مستقل نوفه بر روی‌داده‌های مشاهده‌ای، درایه‌های این ماتریس‌ها به ترتیب شامل وارون انحراف معیارهای مربوط به داده‌های گرانی و مغناطیس می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix}$$

(۳)

که σ_m انحراف معیار مربوط به داده mام است.

در عبارت پایدارکننده، ماتریس $\mathrm{D_j}$ شکل گسسته مشتق پارامترهای مدل در راستاهای x، y و z را اِعمال می‌کند. درواقع $\mathrm{D}\boldsymbol{m}$ بیانگر تقریب مشتق برای پارامتر مدل $\boldsymbol{m}$ می‌باشد.

برای حصول جواب، تابع هدف رابطه (۲) بایست کمینه گردد. بنابراین نیاز است که از این تابع هدف مشتق گرفته شود. وجود تابع پایدارکننده نُرم یک و نیز قید گرادیان متقاطع مشکل‌زا می‌باشد. ابتدا با استفاده از الگوریتم لاوسون (Lawson, 1961) عبارت نُرم یک پایدارکننده به یک عبارت وزن‌دار نُرم دو تبدیل می‌شود:

$$P^{(\alpha,\lambda)}(\boldsymbol{m}) = \left\| \mathrm{W_d}(\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} - \mathrm{G}\,\boldsymbol{m}) \right\|_2^2 + \alpha^2 \left(\sum_{\mathrm{j=x,y,z}} \left\| \begin{bmatrix} (\mathrm{W_{Depth}})_1 (\mathrm{W_{TV_j}})_1 \mathrm{D_j} & \mathbf{0}_{\mathrm{n\times n}} \\ \mathbf{0}_{\mathrm{n\times n}} & (\mathrm{W_{Depth}})_2 (\mathrm{W_{TV_j}})_2 \mathrm{D_j} \end{bmatrix} (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}}) \right\|_2^2 \right) + \lambda^2 \|\boldsymbol{t}\|_2^2$$

(۴)

که ماتریس $\mathrm{W_{TV_j}}$ مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(\mathrm{W_{TV_j}})_{\mathrm{i}} = \mathrm{diag}\left(1 \Big/ \left((\mathrm{D_j}(\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}} - \boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{apr}}))^2 + \varepsilon^2 \right)^{1/4} \right)$$

(۵)

چون $\mathrm{W_{TV_j}}$ وابسته به پارامترهای مدل است، بنابراین کمینه کردن تابع هدف رابطه (۴) نیازمند استفاده از یک الگوریتم تکرار است. پارامتر ε یک

عدد مثبت کوچک $0<\varepsilon \ll 1$ انتخاب می‌شود. زمانی که ε کوچک باشد مدل حاصل تُنُک خواهد بود، درحالی‌که برای مقادیر بزرگ آن مدل‌های هموار به دست می‌آید.

ماتریس قطری $\mathrm{W_{Depth}}$ که در رابطه (۴) واردشده است ماتریس وزن‌دهی عمقی است (Li & Oldenburg, 1996;1998):

$$\left(\mathrm{W_{Depth}}\right)_i = diag\left(1/\left(z_j+z_0\right)^{\beta_i}\right) \qquad (۶)$$

که z_j میانگین عمق مکعب j ام، z_0 وابسته به اندازه مکعب‌ها و ارتفاع برداشت داده‌ها، و ضریب β وزن مناسب را اعمال می‌کند. ماتریس وزن‌دهی عمقی ازاین‌جهت دارای اهمیت است که در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل، مدل‌های بازسازی‌شده تمایل دارند نزدیک سطح متمرکز شوند. این به علت آن است که حساسیت کرنل با عمق کاهش می‌یابد. بنابراین به‌منظور غلبه بر این کاهش حساسیت و بازسازی مدل‌هایی که دارای گسترش عمقی هستند، ماتریس وزن‌دهی عمقی در وارون‌سازی داده‌های گرانی و مغناطیس کاربرد پیداکرده است. انتخاب ضریب وزن‌دهی β باید با دقت انجام پذیرد. اگر مقدار آن بزرگ انتخاب شود به مکعب‌های عمیق‌تر وزن بیشتر می‌دهد و اگر کوچک انتخاب شود ماتریس وزن‌دهی عمقی فاقد کارایی لازم است.

عبارت سوم در رابطه (۴) قید گرادیان متقاطع می‌باشد که در دستگاه مختصات سه‌بعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود (Gallardo & Meju, 2003):

$$\boldsymbol{t}(x,y,z)=\nabla \boldsymbol{m}_1(x,y,z)\times\nabla \boldsymbol{m}_2(x,y,z) \qquad (۷)$$

که اپراتور ∇ به عملگر گرادیان دلالت دارد. زمانی که $\boldsymbol{t}(x,y,z)=\mathbf{0}$ شود، به این معنی است که شباهت ساختاری بین دو مدل حاصل‌شده است و گرادیان دو پارامتر مدل با یکدیگر موازی (هم‌جهت یا خلاف جهت) هستند و یا یکی از بردارهای گرادیان برابر صفر شده است. به لحاظ زمین‌شناسی این بدان معنی است که اگر مرزی وجود داشته باشد، که جداکننده دو واحد سنگ‌شناختی به لحاظ تباین ویژگی‌های فیزیکی باشد، به‌وسیله‌ی هر دو روش در یک مکان باید شناسایی شود. بنابراین، چنانچه ساختاری توسط یکی از مدل‌ها شناسایی گردد، در مدل دیگر نیز این ساختار تا حد ممکن نمایان خواهد شد. به‌منظور خطی کردن قید گرادیان متقاطع از بسط تیلور مرتبه اول استفاده می‌شود (Vatankhah et al. 2022). فرض کنید که مقدار هر متغیر در تکرار lام با اندیس مربوط به آن مشخص می‌شود. به‌عنوان‌مثال $\boldsymbol{m}^{(l)}$ مقدار پارامتر مدل را در تکرار lام مشخص می‌کند. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{m}^{(1)}=\boldsymbol{m}^{\mathrm{apr}}$ و نیز بسط تیلور تابع گرادیان متقاطع، تابع هدف رابطه (۴) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$P^{(\alpha,\lambda)}(\boldsymbol{m})=\left\|\mathrm{W_d}(\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}-\mathrm{G}\,\boldsymbol{m})\right\|_2^2+\alpha^2\left(\sum_{j=x,y,z}\left\|\begin{bmatrix}(\mathrm{W_{depth}})_1(\mathrm{W}_{\mathrm{TV_j}}^{(l-1)})_1\mathrm{D_j} & \mathbf{0}_{n\times n}\\ \mathbf{0}_{n\times n} & (\mathrm{W_{depth}})_2(\mathrm{W}_{\mathrm{TV_j}}^{(l-1)})_2\mathrm{D_j}\end{bmatrix}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^{(l-1)})\right\|_2^2\right)+\lambda^2\left\|\boldsymbol{t}^{(l-1)}+\mathrm{B}^{(l-1)}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^{(l-1)})\right\|_2^2 \qquad (۸)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{t}^{(l-1)}$ بردار گرادیان متقاطع است که با استفاده از پارامترهای مدل به‌دست‌آمده در تکرار (l-1) محاسبه می‌گردد. ماتریس $\boldsymbol{B}^{(l-1)}=(\nabla_m\boldsymbol{t}^{(l-1)})$ ماتریس ژاکوبین برای بردار گرادیان متقاطع می‌باشد.

اکنون می‌توان از تابع هدف کلی رابطه (۸) مشتق گرفت و با قرار دادن این مشتق برابر با صفر، $\nabla_m P^{(\alpha,\lambda)}(\boldsymbol{m})=0$، کمینه این تابع هدف که همان جواب مساله وارون‌سازی می‌باشد را در تکرار l ام به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\mathrm{E}^{(l)}\boldsymbol{m}^{(l)}=\boldsymbol{F}^{(l)} \qquad (۹)$$

که E و $\boldsymbol{F}$ در رابطه (۱۰) تعریف‌شده‌اند. برای حل رابطه (۹) از الگوریتم گرادیان مزدوج (Conjugate Gradient) استفاده می‌شود.

پارامترهای α و λ وزن مربوط به عبارت‌های مختلف را مشخص می‌کنند و نقش مهمی درنتیجه حاصل از وارون‌سازی دارند. اگر مقدار این پارامترها بسیار کوچک انتخاب شوند، عبارت عدم انطباق داده نقش غالب را در وارون‌سازی ایفا خواهد کرد و درنتیجه خطای ناشی از نوفه، در جواب حاصل، بزرگ خواهد شد. مقدار بزرگ این پارامترها نیز سبب می‌گردد که برازش خوبی بین داده پیش‌بینی‌شده و داده مشاهده‌ای صورت نگیرد. شیوه رایج در وارون‌سازی توأمان آن است که الگوریتم با مقادیر بزرگ برای پارامترهای α شروع شود، سپس در طول تکرارهای متوالی الگوریتم، مقادیر این پارامترها به‌تدریج کاهش‌یافته تا آن‌که عدم انطباق موردنظر برآورده شود. این شیوه در تحقیق حاضر نیز مورداستفاده قرارگرفته است. در تکرار اول برای دو پارامتر $\alpha_i^{(1)}$ مقادیر بزرگ، متفاوت با یکدیگر، انتخاب می‌شود، سپس این پارامترها در تکرارهای بعدی با روابط زیر به‌صورت تدریجی کاهش می‌یابند:

$$\alpha_1^{(l+1)}=\alpha_1^{(l)}\,q_1 \qquad (۱۱)$$

$$\alpha_2^{(l+1)}=\alpha_2^{(l)}\,q_2 \qquad (۱۲)$$

پارامترهای q_1 و q_2 میزان کاهش را تعیین می‌کنند. به دلیل آن‌که روند تدریجی برای کاهش پارامترهای تنظیم صورت بپذیرد، بنابراین برای این دو پارامتر، $q_1=0.9$ و $q_2=0.95$ انتخاب‌شده است. پارامتر λ در طول فرآیند وارون‌سازی یک مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود. این به آن مفهوم هست که هم‌زمان با کاهش پارامترهای α_i و ثابت نگه‌داشتن λ، شباهت مدل‌ها در طول تکرارها افزایش می‌یابد.

برای خاتمه دادن به تکرارهای الگوریتم، معیار χ^2 به کار می‌رود.

هرگاه در یک تکرار شرط $\chi^2 = \left\| W_{d_i}(\boldsymbol{d}_i^{obs} - G_i \boldsymbol{m}_i^{(l)}) \right\|_2^2 \le m + \sqrt{2m}$ برای هر دو داده برآورده شود، الگوریتم متوقف می‌شود. در غیر این صورت، الگوریتم در بیشینه تعداد تکرارها، L_{max} که توسط کاربر تعیین می‌شود، خاتمه می‌یابد. همچنین، حدود بالا و پایین برای چگالی و خودپذیری مغناطیسی مورداستفاده قرار می‌گیرد. این کار باعث محدود شدن فضای جستجوی مدل خواهد شد. در فرایند وارون‌سازی هرگاه در یک تکرار مقداری خارج از این کران‌ها حاصل شود، آن مقدار با نزدیک‌ترین مرز مربوطه جایگزین می‌گردد. مراحل انجام وارون‌سازی ارائه‌شده در این مقاله در الگوریتم ۱ خلاصه‌شده است.

الگوریتم ۱: مراحل انجام وارون‌سازی توأمان با استفاده از پایدارکننده تغییرات کلی و قید گرادیان متقاطع.

ورودی‌ها: $\boldsymbol{d}_i^{obs}$، W_{d_i}، G_i، $\boldsymbol{m}_i^{apr}$، ε^2، κ_{min}، κ_{max}، ρ_{min}، ρ_{max}، D_j، $\alpha_i^{(1)}$، λ، β_i، L_{max}.

مرحله ۱. محاسبه $\left(W_{Depth}\right)_i$.

مرحله ۲. قرار دادن $l = 1$

مرحله ۳. قرار دادن $\boldsymbol{m}_i^{(1)} = \boldsymbol{m}_i^{apr}$، و $\left(W_{TV_j}\right)_i^{(1)} = I, \quad i = 1,2, \quad j = x,y,z$.

مرحله ۴. قرار دادن $l = l + 1$

مرحله ۵. محاسبه $\boldsymbol{t}^{(l-1)}$ و $B^{(l-1)}$.

مرحله ۶. حل سیستم $E^{(l)}\boldsymbol{m}^{(l)} = \boldsymbol{F}^{(l)}$ با استفاده از روابط (۱۰) و الگوریتم گرادیان مزدوج.

مرحله ۷. اعمال کران‌های چگالی و خودپذیری به‌طوریکه $\rho_{min} \le \boldsymbol{m}_1 \le \rho_{max}$ و $\kappa_{min} \le \boldsymbol{m}_2 \le \kappa_{max}$.

مرحله ۸. معیار توقف بررسی شود، در صورت برآورده شدن تکرارها متوقف شوند.

مرحله ۹. در صورت عدم توقف در مرحله ۸، بهنگام کردن پارامترهای تنظیم با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲)، و همچنین بهنگام کردن ماتریس‌های $\left(W_{TV_j}\right)_i^{(l)}$.

خروجی: $\rho = \boldsymbol{m}_1^{(l)}$ و $\kappa = \boldsymbol{m}_2^{(l)}$.

$$E^{(l)} = \begin{pmatrix} G^T W_d^T W_d G \\ +\alpha^2 \left(\sum_{j=x,y,z} \begin{bmatrix} D_j^T (W_{TV_j}^{(l-1)})_1^T (W_{depth})_1^T (W_{depth})_1 (W_{TV_j}^{(l-1)})_1 D_j & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & D_j^T (W_{TV_j}^{(l-1)})_2^T (W_{depth})_2^T (W_{depth})_2 (W_{TV_j}^{(l-1)})_2 D_j \end{bmatrix} \right) \\ +\lambda^2 (B^{(l-1)})^T B^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}^{(l)} = \begin{pmatrix} G^T W_d^T W_d \boldsymbol{d}^{obs} \\ +\alpha^2 \left(\sum_{j=x,y,z} \begin{bmatrix} D_j^T (W_{TV_j}^{(l-1)})_1^T (W_{depth})_1^T (W_{depth})_1 (W_{TV_j}^{(l-1)})_1 D_j & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & D_j^T (W_{TV_j}^{(l-1)})_2^T (W_{depth})_2^T (W_{depth})_2 (W_{TV_j}^{(l-1)})_2 D_j \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{m}^{(l-1)} \\ +\lambda^2 (B^{(l-1)})^T \left(B^{(l-1)} \boldsymbol{m}^{(l-1)} - \boldsymbol{t}^{(l-1)} \right) \end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

۳- مدل‌های مصنوعی

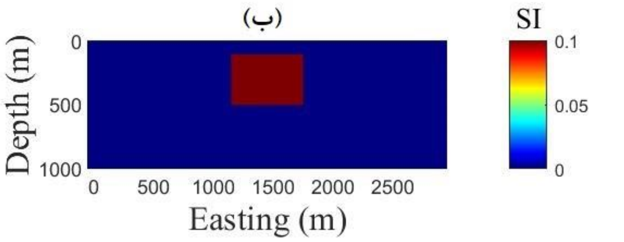
۳-۱- مدل مصنوعی اول

برای بررسی کارایی الگوریتم وارون‌سازی ارائه‌شده، مدل مصنوعی شامل یک مکعب تولیدشده است (شکل ۱- الف و ب). مکعب دارای تباین چگالی ۱ $\frac{g}{cm^3}$ و خودپذیری مغناطیسی ۰/۱ (SI) با محیط پیرامون خود می‌باشد. این مکعب در راستاهای شرق، شمال و عمق به ترتیب دارای گسترش ۶۰۰، ۴۰۰ و ۴۰۰ متر می‌باشد. شکل ۱ سطح مقطع‌هایی غربی- شرقی از این مکعب و در فاصله ۹۵۰ متری شمال مبدأ را نشان می‌دهد. بی‌هنجاری گرانی و مغناطیسی حاصل از این مدل‌ها، $\boldsymbol{d}^{exact}$، در یک شبکه منظم شامل ۶۰۰=۲۰×۳۰ داده با فواصل ۱۰۰ متر در سطح زمین تولید شدند. برای تولید داده گرانی، از فرمول اثر گرانی یک مکعب سه‌بعدی در Blakely (1996) استفاده‌شده است. برای محاسبه میدان مغناطیسی کل مکعب از فرمول توسعه داده‌شده توسط Rao and Babu (1991) استفاده گردید. همچنین، برای تولید داده مغناطیسی،

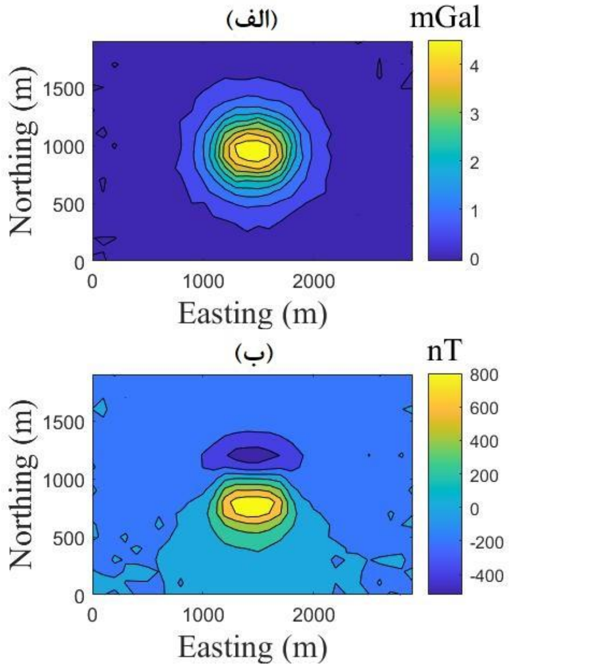
زاویه انحراف مغناطیسی برابر ۲ درجه، زاویه میل مغناطیسی ۵۰ درجه و شدت میدان مغناطیسی ۴۷۰۰۰ نانوتسلا در نظر گرفته‌شده است. برای نزدیک کردن به حالت واقعی یک نوفه گوسی با انحراف معیار $\left(\tau_1\left|(\boldsymbol{d}_i^{exact})_s\right| + \tau_2 max\left(\left|\boldsymbol{d}_i^{exact}\right|\right)\right), \quad s=1,\dots,m.$ به هر داده sام اضافه گردید. زوج پارامتر (τ_1,τ_2) برای داده‌های گرانی (0.02, 0.01) و برای داده‌های مغناطیس (0.01, 0.01) انتخاب شدند. این مدل تولید نوفه منطبق بر مقالات Li & Oldenburg (1996; 1998) است که در آن عبارت نوفه از دو مؤلفه، یکی ثابت برای همه داده‌ها و دیگری متناسب با مقدار هر داده، تشکیل‌شده است. شکل ۲ داده‌های آمیخته به نوفه تولیدشده توسط این مدل را نشان می‌دهند. کلیه محاسبات انجام‌شده در این مقاله توسط سیستمی با مشخصات زیر اجرا می‌گردد:

Laptop computer with Intel(R) Core(TM) i7-10750H CPU2.6 GHz processor and 16 GB RAM

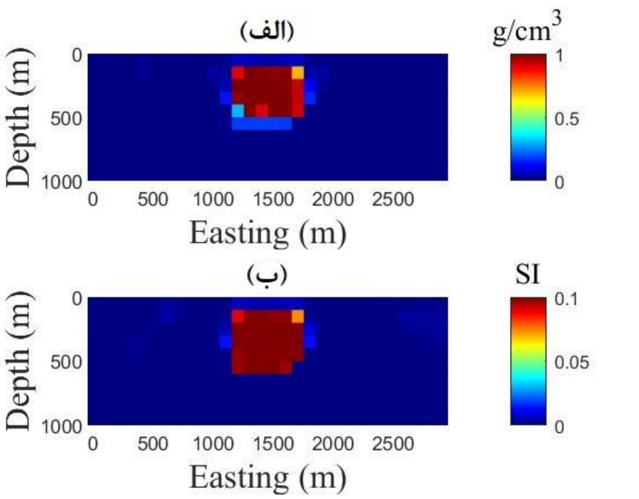
به منظور اجرای الگوریتم وارون‌سازی، زیر سطح ناحیه برداشت به‌وسیله ۶۰۰۰=۱۰×۲۰×۳۰ مکعب گسسته سازی می‌گردد. ابعاد هر مکعب ۱۰۰ متر انتخاب‌شده است. پارامتر تنظیم اولیه برای گرانی و مغناطیس به ترتیب $\alpha_1^{(1)}=5000$ و $\alpha_2^{(1)}=40000$ انتخاب می‌گردد. پارامتر مربوط به قید گرادیان متقاطع در مقدار $\lambda=10^8$ ثابت می‌شود. محدود چگالی مجاز $0<\rho<1\ g/cm^3$ و محدوده خودپذیری مغناطیسی $0<\kappa<0.1$ واحد SI در نظر گرفته‌شده است. همچنین مقدار پارامتر β در ماتریس وزن‌دهی عمقی به ترتیب برای گرانی و مغناطیس برابر $\beta_1=0.8$ و $\beta_2=1.4$ استفاده‌شده است. پارامتر ε^2 در عبارت ماتریس وزن‌دهی برای گرانی 10^{-9} و برای مغناطیس 10^{-10} در نظر گرفته‌شده است (Vatankhah et al. 2022). الگوریتم بعد از ۳۸ تکرار متوقف می‌شود. مدت‌زمان اجرای الگوریتم ۱۶۰۲ ثانیه است. مدل‌های بازسازی‌شده در شکل ۳ و داده مربوطه به آن‌ها در شکل ۴ نشان داده‌شده است. خطای نسبی مدل‌های بازسازی‌شده که با رابطه $\frac{\left\|\boldsymbol{m}_i^{\text{exact}}-\boldsymbol{m}_i^{(l)}\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{m}_i^{\text{exact}}\right\|_2}, \quad i=1,2.$ محاسبه می‌شود برای مدل نهایی چگالی و خودپذیری مغناطیسی به ترتیب ۰/۲۴۲۷ و ۰/۴۲۹۴ می‌باشد. مشخص است که این مدل‌ها متمرکز بوده و لبه‌های چشمه زیرسطحی به‌خوبی حفظ و آشکارشده است. همچنین شباهت خوبی با همدیگر دارند؛ بنابراین الگوریتم توانایی خوبی در آشکار کردن ساختارهای قائم نشان می‌دهد.



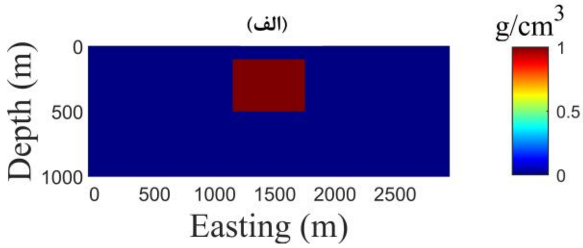
شکل ۱: مدل مصنوعی اول شامل یک مکعب. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.

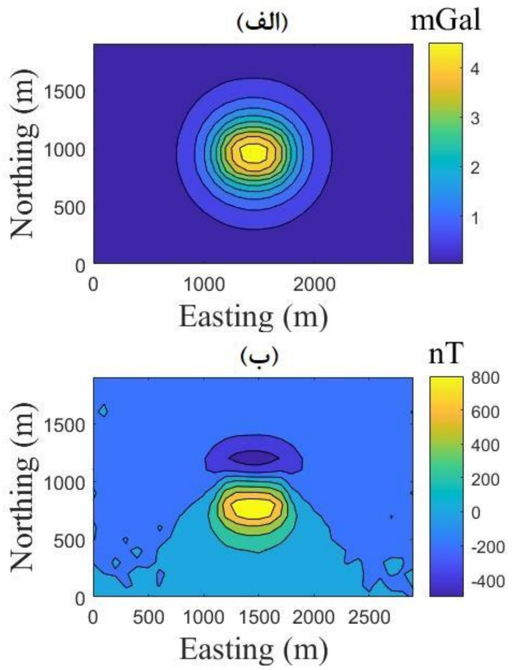


شکل ۲: داده تولیدشده توسط مدل‌های شکل ۱ و آغشته به نوفه گوسی. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.



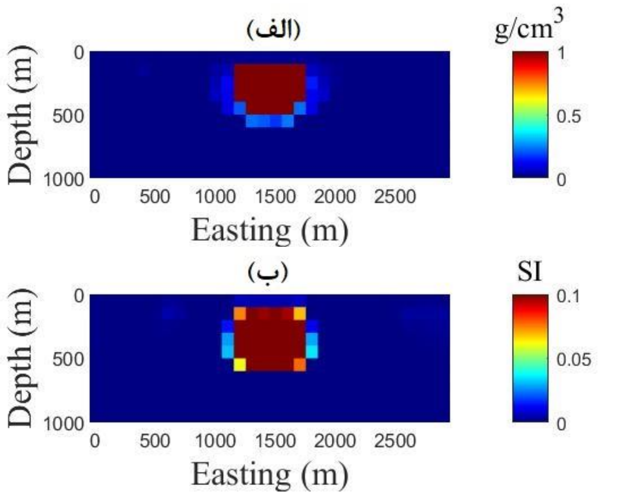
شکل ۳: مدل‌های بازسازی‌شده حاصل از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توأمان بر روی‌داده‌های شکل ۲. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



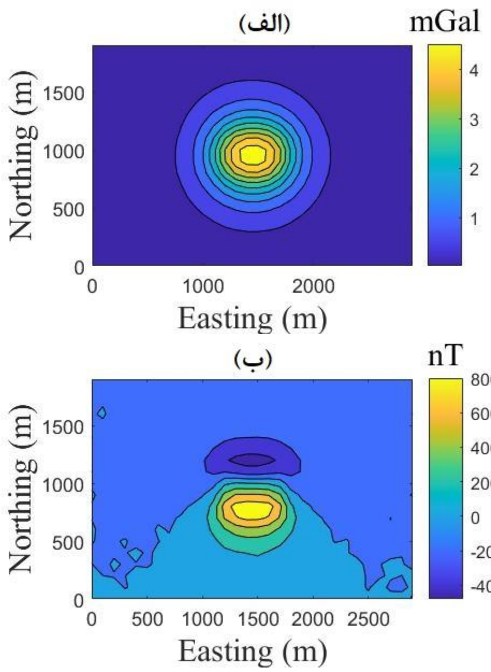


شکل ۴: داده‌های تولیدشده توسط مدل‌های بازسازی‌شده شکل ۳. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.

در مرحله بعد الگوریتم وارون‌سازی با مقدار $\lambda = 0$ اجرا می‌گردد. این بدان مفهوم است که قید گرادیان متقاطع در اجرای الگوریتم مورداستفاده قرار نمی‌گیرد اما بقیه عبارت‌ها به‌کاربرده می‌شوند. الگوریتم پس از ۳۷ تکرار و مدت‌زمان ۱۰۲۲ ثانیه متوقف می‌شود. شکل ۵ (الف و ب) به ترتیب مدل‌های چگالی و خودپذیری مغناطیسی بازسازی‌شده را نشان می‌دهد. خطای نسبی مدل‌های بازسازی‌شده، برای مدل چگالی و خودپذیری مغناطیسی، به ترتیب ۰/۳۶۲۷ و ۰/۴۳۲۳ می‌باشد که در مقایسه باحالت قبل اندکی بیشتر شده‌اند. به‌هرحال این مدل‌ها دارای تطابق مناسبی با مدل اولیه هستند و بنابراین ازلحاظ ژئوفیزیکی قابل‌قبول می‌باشند. مشخص است که هر دو مدل متمرکز بوده و دارای مرز شارپ و گسسته با محیط پیرامونی خود می‌باشند که همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد به دلیل استفاده از پایدارکننده تغییرات کلی می‌باشد. به‌هرحال به دلیل عدم استفاده از قید گرادیان متقاطع، مدل‌ها شباهت کمتری نسبت به حالت قبل دارند. شکل ۶ داده‌های حاصل از مدل‌های بازسازی‌شده را نشان می‌دهد. هر دو داده در تطابق خوبی با داده‌های مشاهده‌ای می‌باشند.



شکل ۵: مدل‌های بازسازی‌شده حاصل از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توأمان بر روی‌داده‌های شکل ۲ و بدون استفاده از قید گرادیان متقاطع. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.

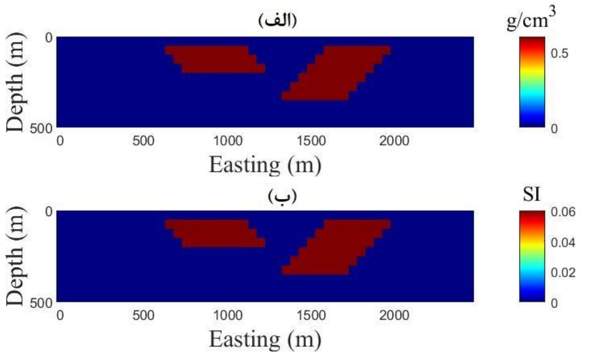


شکل ۶: داده‌های تولیدشده توسط مدل‌های بازسازی‌شده شکل ۵. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.

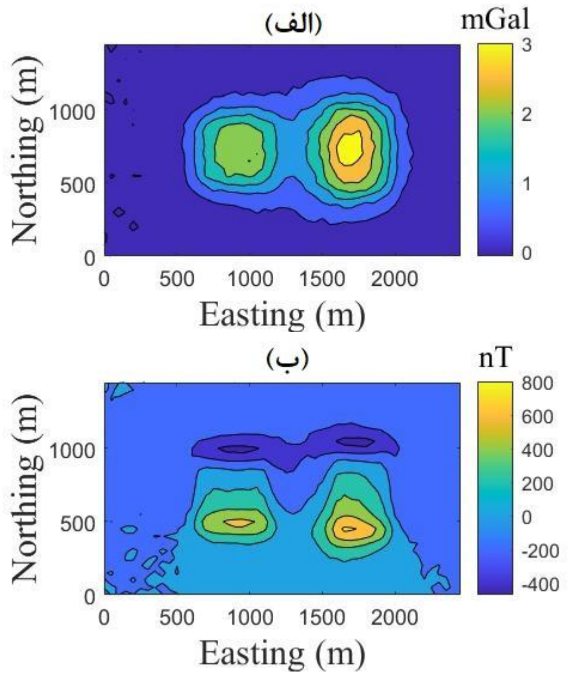
۲-۳- مدل مصنوعی دوم

مدل مصنوعی دوم یک مدل پیچیده شامل دو دایک شیب‌دار می‌باشد. عمق بالای هر دو دایک ۵۰ متر انتخاب‌شده است. دایک شیب‌دار در سمت غرب، تا ۲۰۰ متر و دایک سمت شرق، تا ۳۵۰ متر گسترش دارند. تباین چگالی در نظر گرفته‌شده $\frac{g}{cm^3}$ ۰/۶ و تباین خودپذیری مغناطیسی ۰/۰۶ واحد SI می‌باشد. همچنین جهت تولید داده‌های

مغناطیسی، همانند مدل اول، زاویه انحراف مغناطیسی برابر ۲ درجه، زاویه میل مغناطیسی ۵۰ درجه و شدت میدان مغناطیسی ۴۷۰۰۰ نانوتسلا در نظر گرفته‌شده است. تعداد ایستگاه‌ها، بر روی سطح زمین، ۵۰ ایستگاه در راستای شرق و ۳۰ ایستگاه در راستای شمال، درمجموع ۱۵۰۰ ایستگاه می‌باشد. فاصله ایستگاه‌ها در هر دو جهت ۵۰ متر در نظر گرفته‌شده است. شکل ۷ سطح مقطع‌های غربی-شرقی برای مدل چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فاصله ۷۲۵ متری شمال مبدأ را نشان می‌دهد. همچنین داده آمیخته به نوفه برای این مدل‌ها در شکل ۸ نشان داده‌شده است.



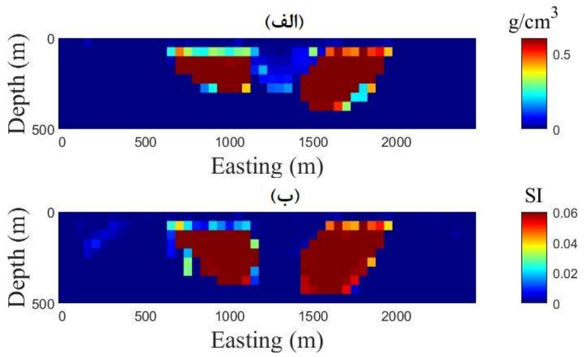
شکل ۷: مدل مصنوعی دوم شامل دو دایک شیب‌دار. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



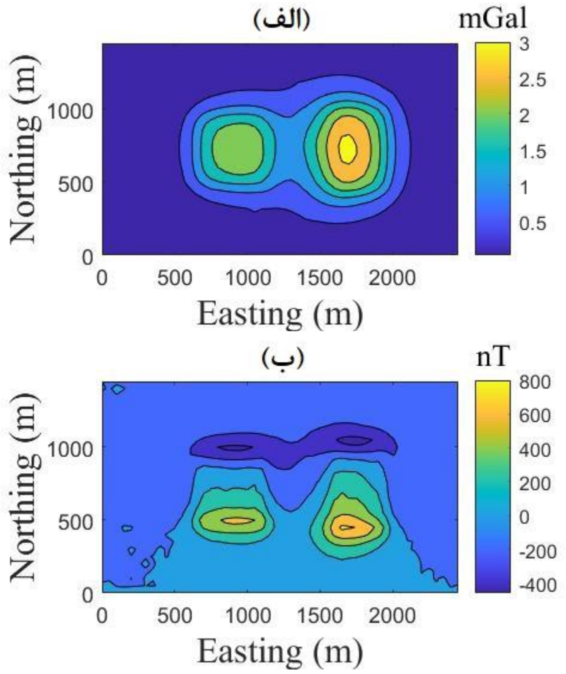
شکل ۸: داده تولیدشده توسط مدل مصنوعی دوم، شکل ۷، آغشته به نوفه گوسی. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.

به‌منظور اجرای الگوریتم وارون‌سازی، سطح زیرین ناحیه برداشت به‌وسیله ۱۵۰۰۰=۱۰×۳۰×۵۰ مکعب گسسته سازی می‌گردد. ابعاد هر مکعب ۵۰ متر انتخاب‌شده است. پارامتر تنظیم برای هر دو مدل همانند مدل مصنوعی اول انتخاب می‌گردد. پارامتر مربوط به قید گرادیان متقاطع در مقدار $\lambda = 10^7$ ثابت می‌شود. حدود چگالی $0 < \rho < 0.6 \ g/cm^3$ و حدود خودپذیری مغناطیسی $0 < \kappa < 0.06$ واحد SI در نظر گرفته‌شده است. همچنین مقادیر پارامترهای β و ε^2 همانند مدل مصنوعی اول می‌باشند. الگوریتم بعد از ۴۹ تکرار متوقف می‌شود، مدت‌زمان اجرای الگوریتم ۹۱۶۳ ثانیه است. مدل‌های بازسازی‌شده در شکل ۹ و داده تولیدشده توسط این مدل‌ها در شکل ۱۰ نشان داده‌شده است. خطای نسبی مدل‌های بازسازی‌شده، برای مدل چگالی و خودپذیری مغناطیسی، به ترتیب ۰/۵۶۲۸ و ۰/۷۹۵۷ می‌باشد. نتایج دلالت بر توانایی الگوریتم وارون‌سازی توأمان جهت بازسازی مدل-های زیرسطحی شیب‌دار دارد. همچنین پایدارکننده ناهمسانگرد تغییرات کلی در بازسازی مرزهای گسسته موفق عمل کرده است. شباهت ساختاری ایجادشده در دایک‌های با خصوصیت فیزیکی مختلف، بیانگر این نکته است که قید گرادیان متقاطع در بهبود نتایج حاصل از الگوریتم وارون‌سازی توأمان تأثیر مهمی داشته است.

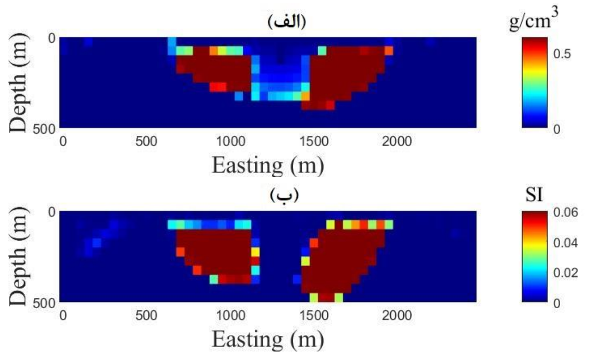
همانند مدل اول، الگوریتم وارون‌سازی توأمان بدون قید گرادیان متقاطع برای این مدل نیز به کار می‌رود. سایر پارامترها ثابت نگه‌داشته می‌شوند. مدل‌های بازسازی‌شده، شکل ۱۱، دلالت بر آن دارد که بازسازی قابل قبولی صورت پذیرفته است. تعداد تکرارها برابر ۵۰ و مدت‌زمان اجرای الگوریتم ۱۰۵۸۴ ثانیه است. خطای نسبی مدل‌های بازسازی‌شده، برای مدل چگالی و خودپذیری مغناطیسی، به ترتیب ۰/۵۶۹۲ و ۰/۸۵۵۱ می‌باشد. با توجه به اینکه قید گرادیان متقاطع استفاده‌نشده است، بنابراین شباهت ساختاری در مدل‌های بازسازی‌شده نسبت به قبل کمتر شده است. بااین‌وجود کاربرد پایدارکننده تغییرات کلی سبب ایجاد مدلی متمرکز با بازسازی بسیار مناسبی شده است. داده‌های حاصل از مدل‌های بازسازی‌شده برازش خوبی در سطح نوفه با داده مشاهده‌ای دارند و در شکل ۱۲ نشان داده‌شده‌اند.



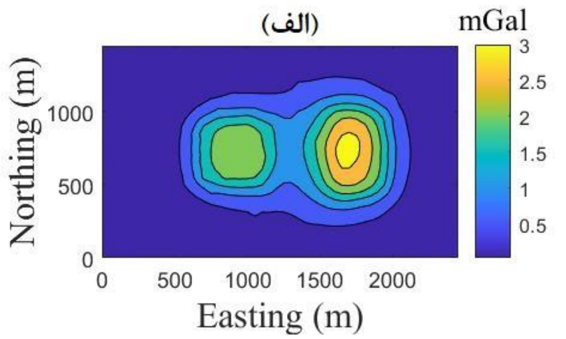
شکل ۹: مدل‌های بازسازی‌شده حاصل از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توأمان بر روی‌داده‌های شکل ۸. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.

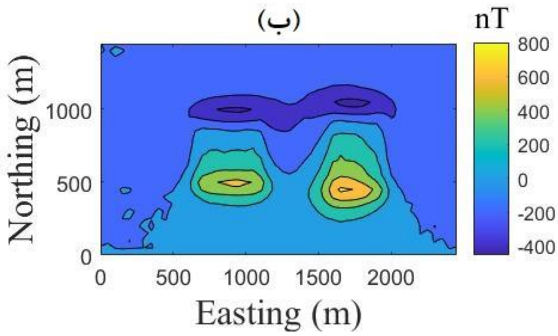


شکل ۱۰: داده‌های تولیدشده توسط مدل‌های بازسازی‌شده شکل ۹. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.



شکل ۱۱: مدل‌های بازسازی‌شده حاصل از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توأمان بر روی‌داده‌های شکل ۸ و بدون استفاده از قید گرادیان متقاطع. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.





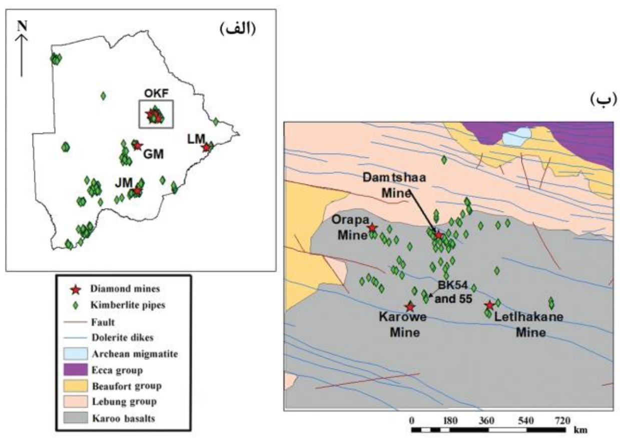
شکل ۱۲: داده‌های تولیدشده توسط مدل‌های بازسازی‌شده شکل ۱۱. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های مغناطیسی.

۴- داده‌های واقعی

در این بخش الگوریتم وارون‌سازی توأمان توسعه داده‌شده بر روی‌داده‌های گرانی و مغناطیس مربوط به لوله‌های کیمبرلیت واقع در معادن اوراپا در کشور بوتسوانا اجرا می‌گردد.

۴-۱- زمین‌شناسی ناحیه موردمطالعه

میدان کیمبرلیت اوراپا[۲] در کشور بوتسوانا، یکی از مناطق مهم تولید الماس در جهان است. در این میدان چندین لوله کیمبرلیت[۳] کوچک وجود دارد که ازنظر گسترش جانبی، عمق و پتانسیل الماس کاملاً کاوش نشده‌اند. دو نمونه از این لوله‌ها با نام‌های BK54 و BK55 طی بررسی‌های ژئوفیزیکی میدان پتانسیل یافت شدند، که به سبب حفاری‌های بعدی، در این مناطق وجود کیمبرلیت تأیید شد. بوتسوانا با چهار منطقه تولید الماس در حال حاضر بزرگ‌ترین تولیدکننده الماس در جهان است (شکل ۱۳-الف).



شکل ۱۳: الف). مناطق تولید الماس در کشور بوتسوانا. محدوده میدان کیمبرلیت اوراپا (OKF) با مستطیل نشان داده‌شده است. ب). نقشه زمین‌شناسی منطقه موردمطالعه و محل تقریبی لوله‌های کیمبرلایت BK54 و BK55 (شکل برگرفته از Matende & Mickus (2021)

1- Orapa kimberlite field (OKF)
2- Kimberlite pipe

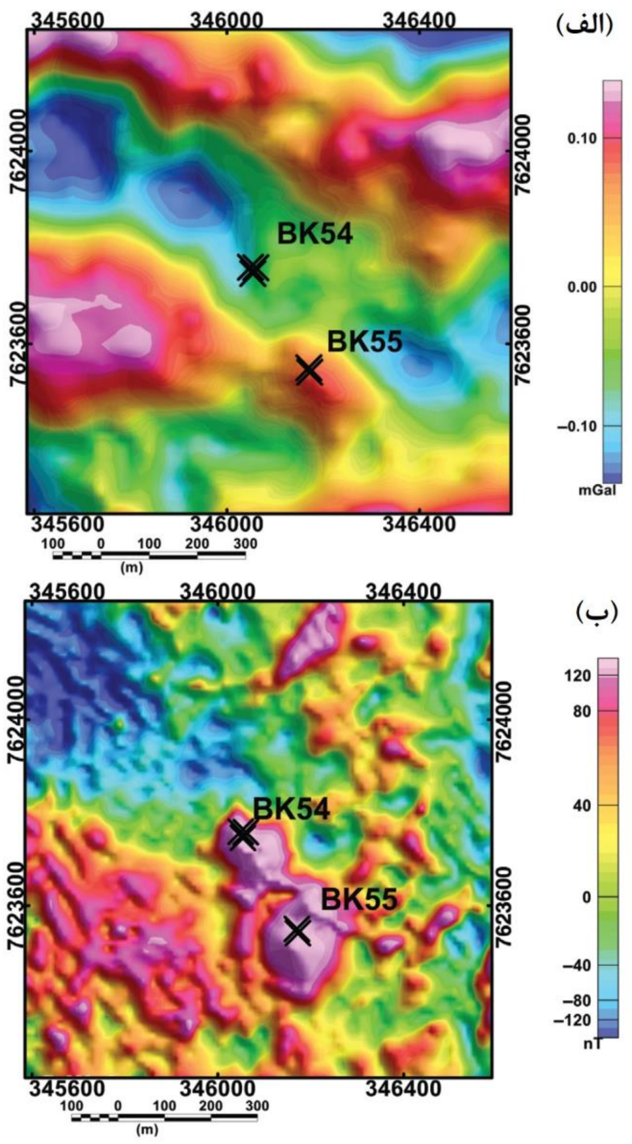
می‌باشد).

مدل کلاسیک لوله کیمبرلیت در آفریقا غالباً از یک لوله شیب‌دار هویج مانند تشکیل‌شده است که با عمق باریک می‌شود (Field et al., 1997). به‌طورکلی، این مدل را می‌توان به سه منطقه عمودی مجزا (از پایین به بالا) تقسیم کرد: (۱) منطقه ریشه که نسبتاً عمیق و باریک متشکل از کیمبرلیت هیپابیزال نفوذی ریزدانه، منسجم و بدون آب‌وهوا می‌باشد، با قطعات سنگ‌بستر کم یا بسیار کم، (۲) منطقه دیاترمی میانی و شیب‌دار متشکل از توف‌های عظیم آتش‌فشانی مملو از قطعات سنگ میزبان، و (۳) بالاترین منطقه دهانه‌ای متشکل از مخلوط تجدید یافته از کیمبرلیت پایروکلاستیک و اپی‌کلاستیکی، سنگ‌بستر و رسوبات، که اغلب به‌خوبی مرتب و منظم می‌شوند. کیمبرلیت اپی-کلاستیک و پایروکلاستیک معمولاً تراکم کمتری دارند و بسیار مستعد هوازدگی هستند (به رس‌های مختلف تبدیل می‌شوند) بنابراین یک ناهنجاری منفی ازنظر گرانی و یک ناهنجاری EM مثبت بر روی لوله‌های کیمبرلیت ایجاد می‌کند. بااین‌حال، اگر رخساره دهانه به دلیل فرسایش کاملاً از بین رفته باشد و دیاترم زیرین از سنگ‌های اطراف آن چگال‌تر باشد، یا اگر رخساره دهانه‌ای هرگز تشکیل نشده باشد، یک لوله کیمبرلیت ممکن است به‌صورت چگال ظاهر شود. از سوی دیگر حساسیت مغناطیسی کیمبرلیت‌های آتش‌فشانی معمولاً بیشتر از سنگ‌های اطراف است و درنتیجه یک بی‌هنجاری مثبت مغناطیسی ایجاد می‌کنند (Power and Hildes 2007; Cunion 2009; Devriese et al. 2017).

لوله‌های کیمبرلیت در نظر گرفته‌شده در این مطالعه در حوضه کالاهاری ایجاد شده‌اند. این حوضه به سمت شمال شرق در سراسر بوتسوانای مرکزی ادامه دارد. این ناحیه تشکیل‌دهنده بخش زیادی از رسوبات کربونیفر پسین تا ژوراسیک پایینی مربوط به حوضه Karoo در جنوب مرکزی آفریقا است. حوضه کالاهاری در بوتسوانا به چندین زیر حوضه تقسیم‌شده و منطقه موردمطالعه در زیر حوضه کمربند شمالی کالاهاری مرکزی قرار دارد. این زیرحوضه در ناحیه اوراپا با گنیس‌های بیوتیت میگماتیتی آرکئن، گنیس‌های هورنبلنددار، آمفیبولیت‌ها و بقایای گرین استون مشخص می‌شود. سوپرگروه Karoo خود از گروه‌های Ecca ، Beaufort، Lebung و Stormberg تشکیل یافته است (شکل ۱۳-ب) (Field et al. 1997).

۲-۴- بی‌هنجاری‌های گرانی و مغناطیسی مشاهده‌ای

داده‌های گرانی زمینی با استفاده از دستگاه گرانی‌سنج Scintrex CG5 در سال ۲۰۰۵ بافاصله ایستگاهی ۲۵ متر در امتداد خطوط بافاصله ۵۰ متر جمع‌آوری‌شده است. داده‌های مغناطیسی زمینی با استفاده از یک مغناطیس‌سنج پروتون بافاصله ایستگاهی ۱۰ متر در امتداد خطوط بافاصله ۲۵ متر از یکدیگر برداشت‌شده است (Matende & Mickus 2021). برای جدایش آنومالی‌های منطقه‌ای و محلی از شیوه برازش چندجمله‌ای استفاده‌شده است. برای داده‌های گرانی، آنومالی منطقه‌ای با چندجمله‌ای درجه سوم و برای داده‌های مغناطیس با چندجمله‌ای درجه اول تقریب زده‌شده است (Matende & Mickus 2021). شکل ۱۴ (الف) نشان می‌دهد که بی‌هنجاری باقی‌مانده گرانی روی BK55 تقریباً دایره‌ای شکل است و در محل BK54 بی‌هنجاری نشان نمی‌دهد. عدم وجود یک ناهنجاری گرانی مثبت ممکن است به دلیل رخساره دهانه باشد که حاوی مواد کم چگال است و معمولاً بسیار هوازدگی دارد. همچنین محتمل است که عدم وجود تباین چگالی بین لوله کیمبرلیت و ماسه‌سنگ اطراف دلیل عدم وجود ناهنجاری گرانی باشد (Matende & Mickus 2021).

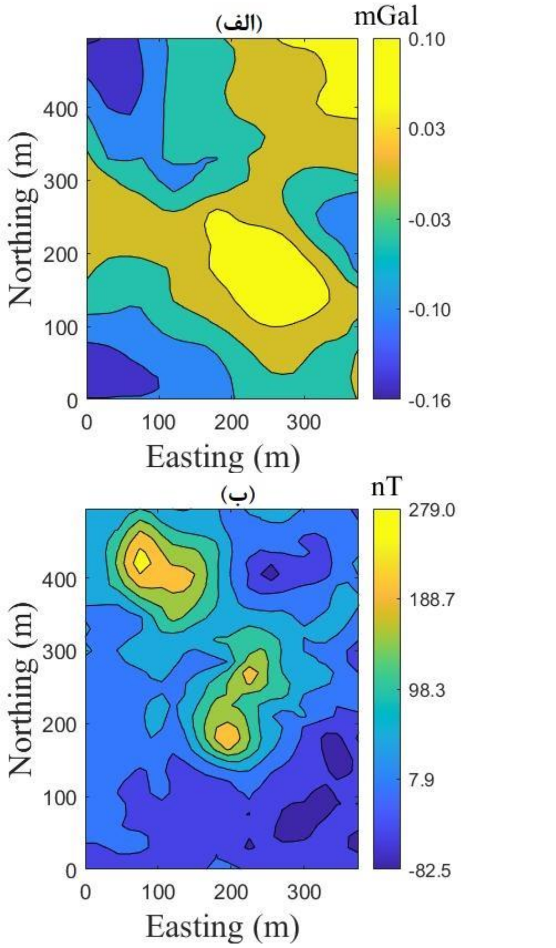


شکل ۱۴: الف) نقشه بی‌هنجاری باقیمانده گرانی که با حذف بی‌هنجاری منطقه‌ای، با تقریب چندجمله‌ای مرتبه سوم، از بی‌هنجاری بوگه تهیه‌شده است. ب) بی‌هنجاری باقیمانده مغناطیسی که با حذف بی‌هنجاری منطقه‌ای با تقریب چندجمله‌ای مرتبه اول تهیه‌شده است

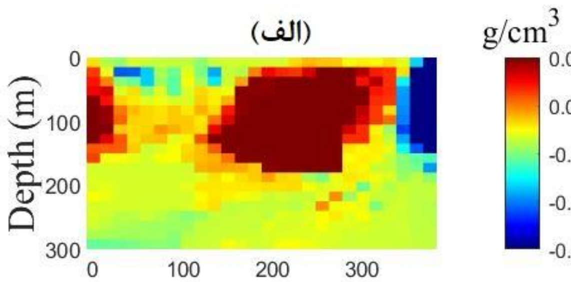
(**شکل‌ها برگرفته از** Matende & Mickus (2021) **می‌باشد**).

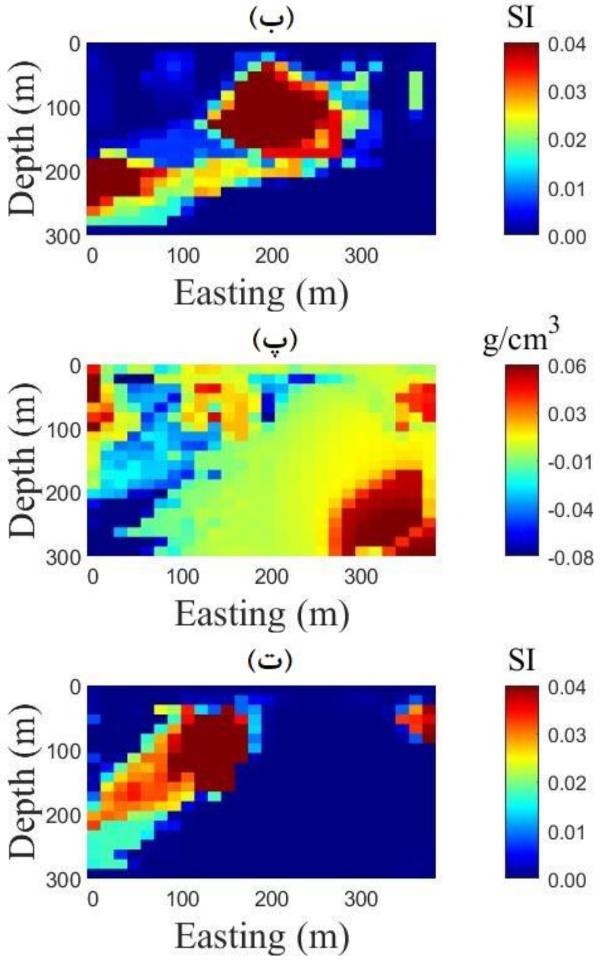
۳-۴- نتایج حاصل از وارون‌سازی

جهت انجام وارون‌سازی بر روی این لوله‌های کیمبرلیت، شبکه‌ای متشکل از ۲۶ ایستگاه در راستای شرق و ۳۴ ایستگاه در راستای شمال با فواصل ۱۵ متری آماده گردید. داده‌های مورداستفاده برای وارون‌سازی در شکل ۱۵ نشان داده‌شده‌اند. در این ناحیه، شدت میدان مغناطیسی برابر با ۲۸۶۲۵ نانوتسلا، زوایای انحراف و میل مغناطیسی به ترتیب ۱۳/۵- و ۶۲/۱- درجه می‌باشند. برای داده‌های گرانی و مغناطیس انحراف معیاری به‌صورت $\left(\tau_1\left|(d_i^{obs})_s\right|+\tau_2 \max\left|d_i^{obs}\right|\right),\ s=1,...,m$ در نظر گرفته می‌شود. زوج پارامتر (τ_1,τ_2) برای داده‌های گرانی $(0.01, 0.01)$ و برای داده‌های مغناطیس $(0.01, 0.03)$ انتخاب می‌گردد. برای اجرای الگوریتم وارون‌سازی توأمان، سطح زیرین ناحیه برداشت توسط ۱۷۶۸۰ =۲۰×۳۴×۲۶ مکعب با ابعاد ۱۵ متر مدل‌سازی می‌شود. مدل اولیه برای چگالی و خودپذیری مغناطیسی بردار صفر می‌باشد. پارامتر تنظیم برای گرانی و مغناطیس به ترتیب از مقدار $\alpha_1^{(1)}=10000$ و $\alpha_2^{(1)}=20000$ شروع می‌شود و در طول تکرارهای بعدی کاهش می‌یابد. پارامتر تنظیم مربوط به قید گرادیان متقاطع در مقدار $\lambda=10^7$ ثابت می‌شود. حدود چگالی $-0.08<\rho<0.06\ \ g/cm^3$ و حدود خودپذیری مغناطیسی $0<\kappa<0.04$ واحد SI، با توجه به اطلاعات حاصل از مقاله Matende & Mickus (2021)، در نظر گرفته‌شده است. پارامتر ε^2 برای گرانی و مغناطیس یکسان و برابر 10^{-9} انتخاب می‌شود. الگوریتم بعد از ۷۰ تکرار متوقف می‌شود. مدت‌زمان اجرای الگوریتم ۱۴۵۷۰ ثانیه است. مدل‌های بازسازی‌ شده در سطح مقطع‌های غربی-شرقی و در فاصله ۱۸۰ و ۳۵۰ متری شمال مبدأ در شکل ۱۶ نمایش داده‌شده‌اند. همچنین شکل ۱۷ مقاطع عمقی در ۷۰، ۱۱۰ و ۱۵۰ متری را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از مدل‌های بازسازی‌شده دلالت بر آن دارد که BK55 شکلی تقریباً کروی تا بیضوی دارد و با توجه به اطلاعات به‌دست‌آمده تا عمق ۱۵۰ الی ۱۷۰ متری زون ریشه‌ای آن ادامه دارد که هر دو مدل بازسازی‌شده توسط داده‌های گرانی و مغناطیس بیانگر این موضوع هستند. لوله کیمبرلیت BK54 دارای ابعاد کوچک‌تر است، همچنین کم‌عمق‌تر می‌باشد. به دلیل استفاده از قید گرادیان متقاطع، ساختار BK54 علی‌رغم نبود بی‌هنجاری گرانی در بازسازی چگالی مشخص‌شده است که این نشان می‌دهد الگوریتم در استفاده از قید گرادیان متقاطع به‌خوبی عمل کرده است. همچنین استفاده از پایدارکننده تغییرات کلی توانسته است مدل حاصل را متمرکز بازسازی کرده و محل مرزها را به‌خوبی حفظ کند. داده‌های حاصل از مدل‌های بازسازی‌شده در شکل ۱۸ نشان داده‌شده‌اند. همچنین اختلاف بین داده‌های مشاهده‌ای و داده‌های پیش‌بینی‌شده که توسط عدم قطعیت نوفه نرمالایز شده‌اند، در شکل ۱۹ نمایش داده‌شده است. این شکل‌ها نمایانگر یک توزیع نوفه گوسی با میانگین صفر است.

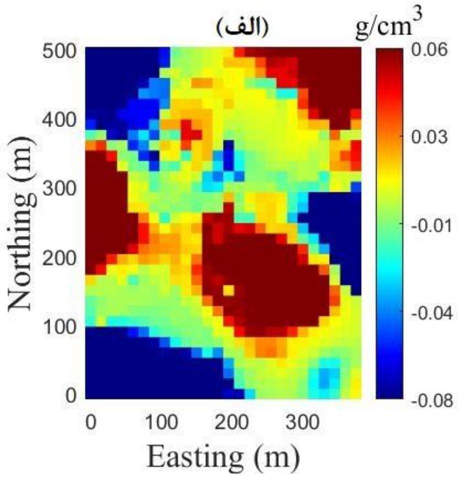


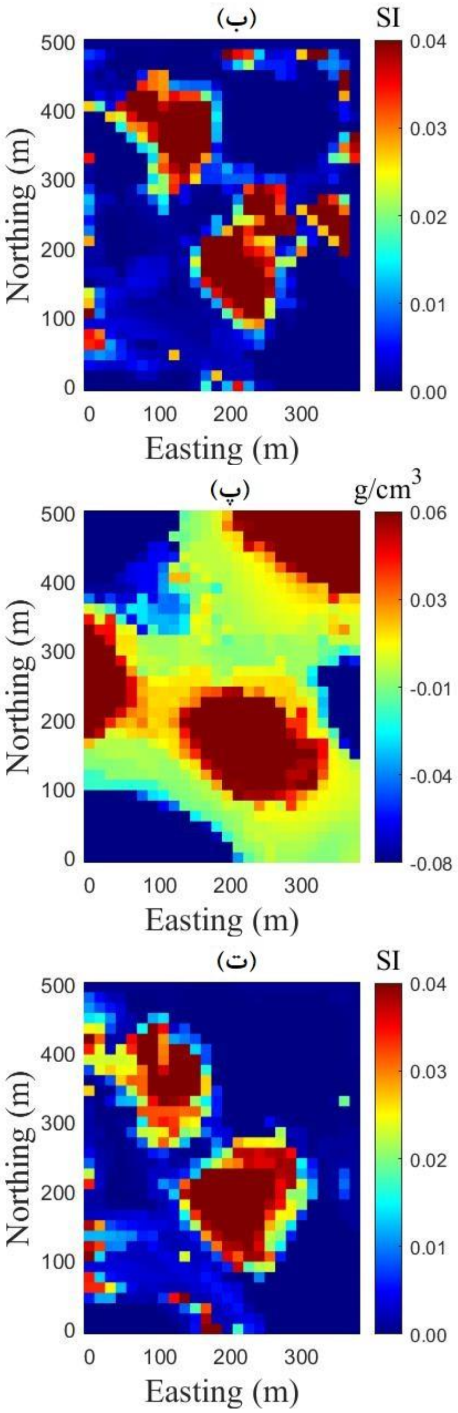
شکل ۱۵: داده‌های مورداستفاده برای وارون‌سازی. الف) بی‌هنجاری گرانی؛ ب) بی‌هنجاری مغناطیسی.

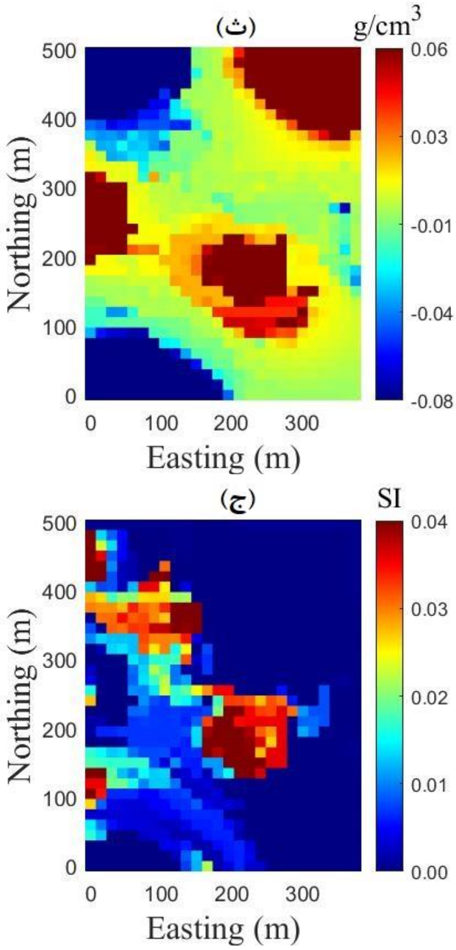




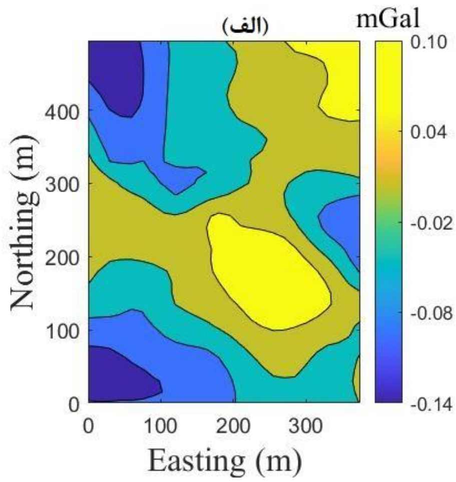
شکل ۱۶: مقاطع شرقی- غربی. (الف) و (ب) به ترتیب توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فاصله ۱۸۰ متری شمال مبدأ را نشان می‌دهند. (پ) و (ت) به ترتیب توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فاصله ۳۵۰ متری شمال مبدأ را نشان می‌دهند.

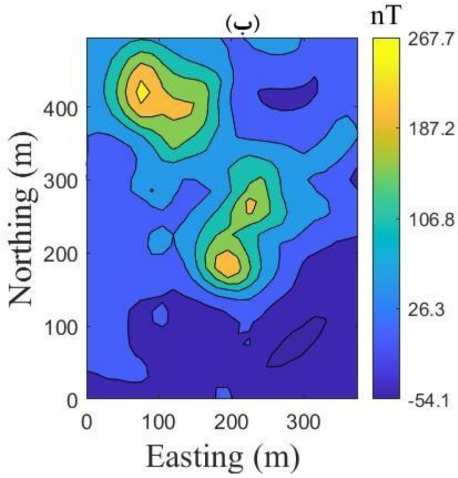




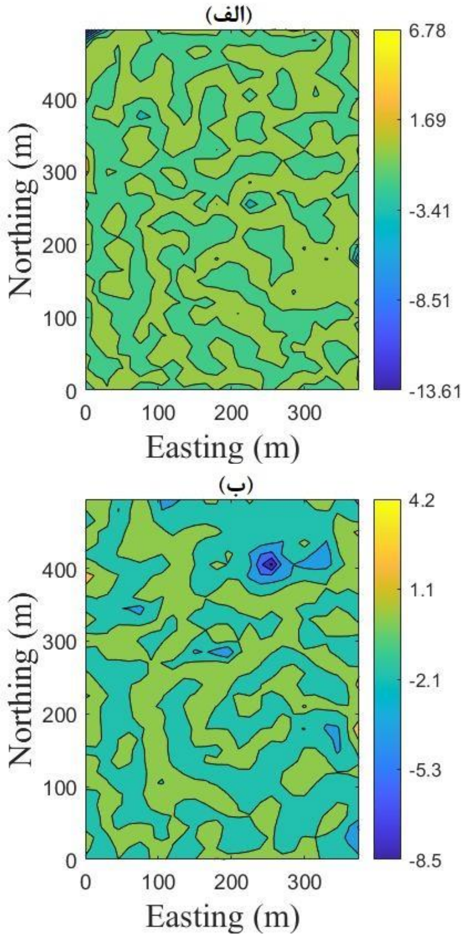


شکل ۱۷: مقاطع عمقی. (الف) و (ب) به ترتیب مقاطع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در عمق ۷۰ متری، (پ) و (ت) مقاطع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در عمق ۱۱۰ متری، (ث) و (ج) مقاطع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در عمق ۱۵۰ متری.





شکل ۱۸: داده‌های تولیدشده توسط مدل‌های بازسازی‌شده شکل‌های ۱۶ و ۱۷. الف) داده‌های گرانی؛ ب) داده‌های میدان مغناطیسی کل.



شکل ۱۹: اختلاف بین داده‌های مشاهده‌ای، شکل ۱۵، و داده‌های حاصل از مدل‌های ساخته‌شده، شکل ۱۸، نرمالایز شده توسط عدم قطعیت‌های نوفه. الف) برای داده‌های گرانی؛ ب) برای داده‌های مغناطیسی.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش الگوریتمی برای وارون‌سازی توأمان سه‌بعدی داده‌های گرانی و مغناطیس با استفاده از قید گرادیان متقاطع و پایدارکننده ناهمسانگرد تغییرات کلی معرفی گردید. قید گرادیان متقاطع با استفاده از بسط تیلور مرتبه اول خطی شده و کمینه‌سازی تابع هدف با استفاده از یک الگوریتم تکرار صورت پذیرفت. با کاربرد الگوریتم بر روی مدل‌های مصنوعی مختلف، نشان داده شد که قید گرادیان متقاطع در ایجاد شباهت ساختاری موفق عمل می‌کند. همچنین استفاده از پایدارکننده ناهمسانگرد تغییرات کلی سبب حصول مدل‌هایی متمرکز می‌شود. الگوریتم قادر است که ناپیوستگی‌ها را بازسازی کرده و لبه‌های ساختار زیرسطحی را در بازسازی حفظ و آشکار نماید. نشان داده شد که بدون استفاده از قید گرادیان متقاطع نیز الگوریتم قادر به بازسازی مدل‌های قابل قبول است، هرچند شباهت مدل‌های بازسازی‌شده کمتر خواهد بود. استفاده از ماتریس وزن‌دهی عمقی از بازسازی نزدیک به سطح مدل‌ها جلوگیری کرد و تمام مکعب‌ها با وزن یکسان در الگوریتم مشارکت داشتند. پارامترهای تنظیم مورداستفاده در الگوریتم از یک مقدار زیاد و متفاوت برای هر مجموعه داده شروع می‌شوند و سپس در طول تکرارهای بعدی کاهش می‌یابند. پارامتر مربوط به قید گرادیان متقاطع نیز ثابت در نظر گرفته شد. نتایج نشان داد که این شیوه در عین سادگی مؤثر و کارآمد است. درنهایت الگوریتم بر روی‌داده‌های واقعی مربوط به معادن کیمبرلیت اوراپا در کشور بوتسوانا مورد آزمایش قرار گرفت. داده‌های گرانی و مغناطیس برداشت‌شده بر روی دو معدن کیمبرلیت BK55 و BK54 در الگوریتم وارون‌سازی توأمان وارد شد. علی‌رغم اینکه ناهنجاری گرانی بوگه بر روی لوله کیمبرلیت BK54 مشاهده نشده بود، الگوریتم با استفاده از شباهت ساختاری ایجادشده توسط قید گرادیان متقاطع توانست مدلی، هرچند نه دقیق، برای توزیع چگالی این ساختار حاصل کند. لوله کیمبرلیت BK54 به لحاظ اندازه و عمق از لوله کیمبرلیت BK55 کوچک‌تر می‌باشد. یکی از دلایل مطرح‌شده برای توجیه نبود بی‌هنجاری گرانی بر روی لوله کیمبرلیت BK54 ژنز مجموعه است که متشکل از فوران‌های انفجاری و درنتیجه تولید مواد توفستیک بیشتر در رخساره‌های دهانه و دیاترم می‌باشد. مدل خودپذیری مغناطیسی بازسازی‌شده نیز علاوه بر توزیع خاصیت مغناطیسی، گسترش، هندسه و عمق توده زیرسطحی را به‌خوبی نشان می‌دهد. بازسازی مناسب و متمرکز ایجادشده توسط الگوریتم وارون‌سازی توأمان، دقت مدل را برای حفاری گمانه‌های اکتشافی آینده بالا خواهد برد. از مشکلات الگوریتم ارائه‌شده، عدم کارایی آن برای حل مسائل بزرگ‌مقیاس می‌باشد. این موضوع در حال حاضر موردتحقیق نویسندگان است. کدهای مورداستفاده در این مقاله در نرم‌افزار متلب نوشته‌شده است و نزد نویسنده رابط موجود است.

۶- سپاس‌گزاری

نویسندگان از پروفسور کیوین میکوس برای در اختیار قرار دادن داده‌های واقعی مربوط به معادن کیمبرلایت اوراپا کمال تشکر را دارند.

۷- منابع

Blakely, R. J., Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications, Cambridge University Press, Cambridge.

Constable, S. C., Parker, R. L. & Constable, C. G., 1987. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data, Geophysics, 52 (3), 289-300.

Cunion, E., 2009. Comparison of ground TEM and VTEM responses over kimberlite in the Kalahari of Botswana: Exploration Geophysics, 40, 308– 319, doi: 10.1071/EG09019.

Devriese, S., Davis, K. & Oldenburg, D. W., 2017. Inversion of airborne geophysics over the DO-27/DO-18 kimberlites — Part 1: Potential fields, Interpretation, 5 (3), T299–T311.

Field, M., Gibson, J. G., Wilkes, T. S., Gababots, J. & Khujwep, P., 1997. The geology of the Orapa A/K1 kimberlite, Botswana: Further insight into the emplacement of kimberlite pipes: Proceedings of the 6th International Kimberlite Conference, 155–157.

Fregoso, E. & Gallardo, L. A., 2009. Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data, Geophysics, 74 (4), L31-L42.

Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2003. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of DC resistivity and seismic data, Geophysics. Res. Lett., 30 (13), 1658, doi: 10.10 29/2003GL017370.

Gallardo, L. A. & Meju, M. A., 2004. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints, Journal of Geophysical Research, 109, B03311.

Gallardo, L. A., 2007. Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging, Geophys. Res. Lett., 34 (19), L19301.

Haber, E. & Oldenburg, D. W., 1997. Joint inversion: a structural approach, Inverse Problems, 13, 6377.

Haber, E. & Holtzman Gazit, M., 2013. Model Fusion and Joint Inversion, Surv. Geophys., 34, 675-695.

Lawson, C. L., 1961. Contribution to the Theory of Linear Least Maximum Approximation, Ph.D. thesis, University of California.

Li, Y. & Oldenburg, D. W., 1996. 3-D inversion of magnetic data, Geophysics, 61 (2), 394-408.

Tryggvason, A & Linde, N., 2006. Local earthquake (LE) tomography with joint inversion for P and S-wave velocities using structural constraints, Geophysical Research Letters, 33, L07303, doi:10.1029/2005GL0, 25485.

Vatankhah, S., Renaut, R. A., Liu, S., 2020. A unifying framework for the widely used stabilization of potential field inverse problems, Geophysical Prospecting, **68**, 1416-1421.

Vatankhah, S., Shuang Liu, Rosemary Anne Renaut, Xiangyun Hu, Jarom David Hogue, and Mostafa Gharloghi, 2022. An Efficient Alternating Algorithm for the L**p**-Norm Cross-Gradient Joint Inversion of Gravity and Magnetic Data Using the 2-D Fast Fourier Transform, IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING, vol. 60, pp. 1-16.

Li, Y. & Oldenburg, D. W., 1998. 3-D inversion of gravity data, Geophysics, 63 (1), 109-119.

Matende, K. & and Mickus, K., 2021. Magnetic and gravity investigation of kimberlites in north-central Botswana. Geophysics, 86 (2), B67–B78.

Power, M. & Hildes, D., 2007. Geophysical strategies for kimberlite exploration in northern Canada: Proceedings of Exploration 07-Fifth Decennial International Conference of Mineral Exploration, 1025–1031.

Pilkington, M., 1997. 3-D magnetic imaging using conjugate gradients, Geophysics, 62 (4), 1132-1142.

Rao, D. B., and Babu, N. R., 1991. A rapid method for three dimentional modeling of magnetic anomalies, Geophysics, 56, 1729-1737.

Shahrood University of Technology

JOURNAL OF RESEARCH ON APPLIED GEOPHYSICS

(JRAG)
2022, VOL 8, NO 1
(DOI): 10.22044/JRAG.2022.12000.1334

Joint inversion of gravity and magnetic data using total variation stabilizer and cross-gradient constraint

Mehdi Chaharpashlu[1], Saeed Vatankhah *[2] and Mostafa Gharloghi [3]

1- M.Sc. student, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran
2- Assistant Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.
3- Ph.D. candidate, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Received: 14 June 2022; Accepted: 24 October 2022

Corresponding author: svatan@ut.ac.ir

Keywords

Joint inversion
Total variation (TV)
Cross-gradient
Gravity
Magnetic

Extended Abstract

Summary

It is well-known that the solution of the individual potential field inversion problem, either gravity or magnetic, is non-unique. One efficient strategy to reduce the uncertainty of the solution, and to improve the obtained results, is the simultaneous joint inversion of two or more data sets. In this case, different geophysical data sets are used simultaneously in an inversion algorithm. Depending on the coupling between different model parameters, the algorithm provides the solutions, which satisfy the observed data and coupling constraint. Combined with regularization, this is an effective strategy to obtain a reliable subsurface model. In this study, an algorithm for the joint inversion of gravity and magnetic data using anisotropic total variation (TV) stabilizer is developed. The anisotropic TV stabilizer consists of the individual L_1-norm of the gradient of the model parameters in three orthogonal directions. Therefore, our algorithm preserves the edge of the subsurface targets and provides focus models. Here, the relationship between different model parameters is enforced using the cross-gradient coupling. This constraint uses the model topology in order to enhance the structural similarity of the reconstructed models. Then, the information from both data sets can be used to provide reliable models. This simplifies the interpretation of the subsurface targets. The developed algorithm is validated on two different synthetic examples. The results indicate that the algorithm is practical and can provide focus and similar models. Finally, we invert the gravity and magnetic data obtained over kimberlite pipes BK54 and BK55 in Orapa, Botswana. The reconstructed models are consistent with the geological and borehole information from the survey area.

Introduction

Potential field surveys including gravity and magnetic surveys have been used for many years as effective strategies for delineating subsurface targets. They can provide valuable information about geometric and physical characteristics of the subsurface targets. Joint inversion of gravity and magnetic data sets has recently received considerable attention in geophysical community. Indeed, a model consistent with both data sets is more reliable than a model, which is produced by only a single data set. In the joint inversion algorithm, the linkage between different model parameters can be imposed by either petrophysical or structural coupling approaches. In the petrophysical approaches, it is assumed that there is a direct relationship between different model parameters. On the other hand, the structural approaches use, instead, the model topology in order to enhance the structural similarity of reconstructed models. The cross-gradient coupling is a widely-used constraint in the structural approaches. The main idea is that changes, at any point in the different models, should occur in the same or opposite spatial directions, or alternatively, changes will only occur in one of the models. Therefore, the reconstructed models are as similar as possible. Different types of stabilizers have been developed for the inversion of potential field data, dependent on the desire model features that one wishes to recover. Here, we use anisotropic total variation (TV) stabilizer. Then, our joint inversion algorithm preserves the edge of the subsurface targets and provides focus models.

Methodology and Approaches

To formulate the problem, we divide the subsurface into a set of rectangular prisms with fixed sizes but unknown physical properties, density and magnetic susceptibility. The joint inversion is formulated as minimization of a global objective function comprising of data misfits, anisotropic TV stabilizers, and cross-gradient term. The depth weighting is also used in our algorithm. The objective function is minimized using an iteratively reweighted least square approach. In each iteration, the conjugate gradient algorithm is used to numerically solve the resulting linear system.

Results and Conclusions

The developed algorithm is validated on two synthetic models. The results illustrate the performance of the algorithm. The reconstructed models are focus and as structurally similar as possible. Finally, the algorithm is applied on real data obtained over two kimberlite pipes in Orapa, Botswana. The geometric and physical properties of both pipes are reconstructed well. The models are consistent with the borehole information available in the survey area.