



دانشگاه صنعتی شاهرود

دوره ۸، شماره ۱، ۱۴۰۱، صفحات ۴۵-۶۰

DOI: 10.22044/JRAG.2021.10221.1308 شناسه دیجیتال

وارون سازی توامان سه بعدی داده های گرانی و مغناطیس با استفاده از قید گرامیان و پایدار کننده نرم یک

مصطفی قارلقی^۱، سعید وطن خواه^{۲*} و شوانگ لیو^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۲- استادیار، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

۳- دانشیار، دانشگاه علوم زمین چین (ووهان)، چین

دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۰۷

* نویسنده مسئول مکاتبات: svatan@ut.ac.ir

چکیده

مساله وارون سازی داده های میدان پتانسیل، گرانی سنجی و مغناطیس سنجی، دارای عدم یکتایی بالایی است. یکی از روش های موثر برای کاهش عدم یکتایی مساله، وارون سازی توامان این داده ها می باشد. این بدان مفهوم است که داده های مختلف به طور همزمان در یک الگوریتم وارون سازی وارد شده، سپس، با توجه به وابستگی مستقیم و یا غیر مستقیم بین پارامترهای مدل های مختلف، الگوریتم با محدود کردن فضای مدل به سمت حصول نتایجی رود که داده ها و نیز ارتباط بین پارامترهای مدل را مورد نظر قرار داده باشد. در تحقیق حاضر وارون سازی توامان داده های گرانی و مغناطیس با استفاده از قید گرامیان مورد نظر است. قید گرامیان بر اساس کمینه کردن دترمینال ماتریس گرام یک سیستم از پارامترهای مدل مختلف می باشد. کاربرد قید گرامیان ارتباط خطی بین پارامترهای مدل های مختلف، و یا تبدیلات این پارامترها، برقرار می سازد. در واقع در وارون سازی توامان با استفاده از قید گرامیان نیازی به ورود اطلاعات اولیه در مورد همبستگی بین پارامترهای مدل های مختلف وجود ندارد بلکه این همبستگی در طی فرآیند وارون سازی فراهم می شود که یک مزیت مهم برای این روش است. علاوه بر این، به منظور حصول مدل های تنک با مرزهای شارپ و گسسته، پایدار کننده نرم یک در الگوریتم حاضر مورد استفاده قرار گرفته است. الگوریتم وارون سازی توامان ارائه شده بر روی مدل های مصنوعی و یک نمونه داده واقعی به کار رفته است.

واژگان کلیدی

وارون سازی توامان

قید گرامیان

گرانی

مغناطیس

۱- مقدمه

روش های ژئوفیزیکی به دنبال آن هستند که تصویری از توزیع خواص فیزیکی و نیز هندسه مربوط به ساختارهای زیر سطحی، با استفاده از داده برداشت شده بر روی سطح، فراهم آورند. خواص فیزیکی متفاوت داده متفاوت تولید می کنند و این حقیقت پایه و اساس توسعه روش های مختلف ژئوفیزیکی بوده است. در این میان اکتشافات ژئوفیزیکی بر مبنای میدان های پتانسیل، گرانی سنجی و مغناطیس سنجی، برای سال های طولانی مورد توجه و استفاده محققان بسیاری بوده است. مطالعات فراوانی در حوزه اکتشافات هیدروکربن، اکتشافات مواد معدنی، مطالعات حوضه های رسوبی و تعیین عمق پی سنگ و نیز مطالعات ناحیه ای و منطقه ای پوسته برای تعیین مرز موهو در طول این سال ها با استفاده از این روش ها انجام شده است (Nabighian et al., 2005; Blakely, 1996). هر دو روش نسبتاً ارزان هستند و در دسته روش های سنجش از دور غیر فعال طبقه بندی می شوند، بنابراین کاربرد همزمان آنها می تواند اطلاعات مفیدی از سطح زیرین فراهم آورد. در مرحله تفسیر، می توان از وارون سازی توامان این داده ها به عنوان روشی موثر برای نشان دادن توزیع هندسی و خواص فیزیکی ساختارهای زیر سطحی استفاده کرد. این بدان مفهوم است که داده های مختلف به طور همزمان در یک الگوریتم وارون سازی وارد شده، سپس، با توجه به وابستگی مستقیم و یا غیرمستقیم بین پارامترهای مدل های مختلف، الگوریتم با محدود کردن فضای مدل به سمت حصول نتایجی رود که تمامی داده ها و نیز ارتباط بین پارامترهای مدل های مختلف را مورد نظر قرار داده باشد. در این حالت است که عدم یکتایی جواب مساله وارون تا حد زیادی کاهش یافته است و مفسر می تواند با اطمینان بیشتری به تفسیر نتایج حاصل بپردازد. امروزه الگوریتم های متفاوتی در وارون سازی توامان داده های ژئوفیزیکی کاربرد دارند. در یک تقسیم بندی کلی می توان غالب این الگوریتم ها را در یکی از دو دسته کلی زیر قرار داد (Gallardo and Meju, 2004): الف) روش هایی که شامل استفاده از خواص پتروفیزیکی یا هیدرولوژیکی برای برقراری ارتباط بین دو خاصیت فیزیکی مختلف هستند. ب) روش هایی که در برگیرنده استفاده از ویژگی های ساختاری به عنوان یک عامل مشترک میان مدل های ژئوفیزیکی می باشند. اخیراً (Zhdanov et al., 2012) الگوریتمی کلی برای وارون سازی توامان داده های ژئوفیزیکی بر اساس قید گرامیان ارائه دادند. قید گرامیان بر اساس کمینه کردن دترمینان ماتریس گرام یک سیستم از پارامترهای مدل های مختلف می باشد و این امکان را فراهم می کند که هر دو دسته از الگوریتم های وارون سازی توامان ذکر شده در بالا را بتوان، بسته به شرایط، مورد استفاده قرار داد. در این شیوه یک تابع هدف کلی متشکل از عبارات عدم انطباق داده، عبارات پایدارکننده، و قید گرامیان کمینه می شود. کمینه شدن تابع هدف کلی بدان مفهوم است که دترمینال ماتریس گرام (قید گرامیان) به سمت صفر می رود. هنگامی که دترمینال به سمت صفر می رود، همبستگی میان پارامترهای مدل مختلف، و یا نشانگرهای

پارامترهای مدل، ایجاد می گردد. بنابراین می توان گفت که در وارون سازی توامان با استفاده از قید گرامیان ارتباط و همبستگی میان پارامترهای مدل مختلف در طی فرآیند وارون سازی به دست می آید و نیازی به اطلاعات اولیه معلوم در مورد این ارتباط وجود ندارد که یک مزیت مهم محسوب می شود.

در ادامه، بخش ۲، تئوری روش وارون سازی توامان داده های گرانی و مغناطیس براساس قید گرامیان به تفصیل توضیح داده خواهد شد. همچنین در این بخش شیوه کمینه سازی تابع هدف کلی با استفاده از الگوریتم $RRCG$ و نیز نحوه تعیین پارامترهای تنظیم در فرآیند وارون سازی آورده شده است. در بخش ۳، نتایج حاصل از کاربرد الگوریتم بر روی دو مدل مصنوعی متفاوت ارائه می گردد. بخش ۴، اختصاص به وارون سازی توامان داده های گرانی و مغناطیس برداشت شده بر روی کانسار آهن در ناحیه ای در شمال غرب چین دارد.

۲- تئوری روش

سطح زیرین در ناحیه برداشت به وسیله n مکعب با هندسه ثابت گسسته سازی می شود. خاصیت فیزیکی نامعلوم مربوط به این مکعب ها، تغییرات چگالی و خودپذیری مغناطیسی، مورد جستجو است. با فرض آن که m داده بر روی سطح برداشت شده باشد، با صرف نظر کردن از مغناطیس بازماند، رابطه خطی بین بردار پارامترهای مدل و بردار داده های مربوطه، گرانی و مغناطیس، به صورت زیر است:

$$\mathbf{d}_{obs}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{m}^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

که $\mathbf{A}^{(i)}$ و $\mathbf{m}^{(i)}$ به ترتیب ماتریس کرنل و بردار پارامترهای مدل مربوط به داده i ام، $\mathbf{d}_{obs}^{(i)}$ می باشند. وارون سازی توامان برای این دو مجموعه داده را می توان به صورت کمینه کردن یک تابع هدف کلی به شکل زیر فرمول بندی کرد:

$$P^{(\alpha, \lambda)}(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{m}}^{(2)}) = \sum_{i=1}^2 \left\| \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \tilde{\mathbf{m}}^{(i)} - \tilde{\mathbf{d}}^{(i)} \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \alpha^{(i)} \left\| \tilde{\mathbf{m}}^{(i)} - \tilde{\mathbf{m}}_{apr}^{(i)} \right\|_2^2 + \lambda S_G(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{m}}^{(2)}). \quad (2)$$

اندیس i به مجموعه داده های ژئوفیزیکی مختلف اشاره دارد که $i = 1$ مربوط به داده گرانی و $i = 2$ برای داده های مغناطیسی در نظر گرفته می شود. در این رابطه، عبارت های $\left\| \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \tilde{\mathbf{m}}^{(i)} - \tilde{\mathbf{d}}^{(i)} \right\|_2^2$ عدم انطباق داده وزن دار برای هر یک از مجموعه داده ها، $\left\| \tilde{\mathbf{m}}^{(i)} - \tilde{\mathbf{m}}_{apr}^{(i)} \right\|_2^2$ عبارت های تنظیم و $S_G(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{m}}^{(2)})$ قید گرامیان می باشد. در رابطه (۲)، $\tilde{\mathbf{A}}^{(i)}$ ماتریس کرنلی است که از هر دو طرف وزن داده شده است و از حاصل ضرب یک ماتریس قطری وزن دهی داده $\mathbf{W}_d^{(i)}$ ، با فرض آن که نوفه موجود در داده ها دارای توزیع مستقل باشند، و یک ماتریس وزن دهی $\mathbf{W}^{(i)}$ ایجاد شده است:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(i)} = \mathbf{W}_d^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \left(\mathbf{W}^{(i)} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$\tilde{m}_{apr}^{(i)} = W^{(i)} m_{apr}^{(i)} \quad (10)$$

عبارت سوم در رابطه (۲) قید گرامیان است که برای دو پارامتر مدل وزن‌دار به صورت دترمینان زیر تعریف می‌گردد (Zhdanov et al., 2012):

$$S_G(\tilde{m}^{(1)}, \tilde{m}^{(2)}) = \begin{vmatrix} (\tilde{m}^{(1)}, \tilde{m}^{(1)}) & (\tilde{m}^{(1)}, \tilde{m}^{(2)}) \\ (\tilde{m}^{(2)}, \tilde{m}^{(1)}) & (\tilde{m}^{(2)}, \tilde{m}^{(2)}) \end{vmatrix} \quad (11)$$

که عملگر (...) به ضرب داخلی دلالت دارد. با کمینه‌کردن این قید در تابع هدف کلی رابطه (۲)، وابستگی خطی بین پارامترهای وزن‌دار مدل‌های مختلف به وجود می‌آید:

$$\tilde{m}^{(1)} = k \cdot \tilde{m}^{(2)} \quad (12)$$

که k یک عدد حقیقی است. بنابراین دیگر نیازی به داشتن اطلاعات اولیه در مورد همبستگی بین پارامترهای مدل مختلف، یا تبدیلات این پارامترها، وجود ندارد و این ارتباط و همبستگی در طی فرآیند وارون‌سازی به دست خواهد. برای جزئیات بیشتر می‌توان به (Zhdanov et al., 2012) و (Lin & Zhdanov 2018) مراجعه کرد.

پارامترهای α و λ وزن مربوط به عبارتهای مختلف را مشخص می‌کنند و نقش مهمی در نتیجه حاصل از وارون‌سازی دارند. اگر مقدار این پارامترها بسیار کوچک انتخاب شوند، عبارت عدم انطباق داده نقش غالب را در وارون‌سازی ایفا خواهد کرد و نتیجه آن خواهد شد که خطای ناشی از نوفه در جواب بزرگ خواهد شد. مقدار بزرگ این پارامترها نیز سبب می‌گردد که برازش خوبی بین داده پیش‌بینی شده و داده مشاهده‌ای صورت نگیرد (Hansen, 1992). شیوه رایج در وارون‌سازی توامان آن است که الگوریتم با مقادیر بزرگ این پارامترها شروع شود، سپس در طول تکرارهای متوالی الگوریتم، مقادیر این پارامترها به تدریج کاهش یافته تا آن‌که عدم انطباق مورد نظر برآورده شود. با الهام گرفتن از این راه کار موثر، یک شیوه ابتکاری برای تعیین این پارامترها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تکرار اول برای دو پارامتر $\alpha^{(i)}$ مقادیر بزرگ، متفاوت با یکدیگر، انتخاب می‌شود، سپس این پارامترها در تکرارهای بعدی با روابط زیر به صورت تدریجی کاهش می‌یابند:

$$\alpha_{k+1}^{(1)} = \alpha_k^{(1)} q^{(1)} \quad (13)$$

$$\alpha_{k+1}^{(2)} = \alpha_k^{(2)} q^{(2)} \quad (14)$$

پارامترهای $q^{(1)}$ و $q^{(2)}$ میزان کاهش را تعیین می‌کنند. این پارامترها طوری انتخاب می‌شوند که پارامترهای $\alpha^{(i)}$ با مقداری متناسب با فاصله توابع عدم انطباق در تکرار حاضر، $\phi(d^{(i)})$ ، با مقادیر هدف آنها، تنظیم شوند. برای این منظور دو تابع زیر تعریف می‌گردد:

$$\omega_1 = \frac{\phi(d^{(1)})}{m + \sqrt{2m}}, \quad q^{(1)} = \frac{1}{\omega_1} \quad (15)$$

$$\omega_2 = \frac{\phi(d^{(2)})}{m + \sqrt{2m}}, \quad q^{(2)} = \frac{1}{\omega_2} \quad (16)$$

عناصر روی قطر اصلی ماتریس $W_d^{(i)}$ به صورت وارون انحراف معیارهای نوفه می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix} \quad (4)$$

که σ_m انحراف معیار مربوط به داده m ام است. ماتریس وزن‌دهی $W^{(i)}$ به صورت حاصل ضرب دو ماتریس قطری در نظر گرفته می‌شود (Vatankhah et al., 2017):

$$W^{(i)} = (W_{depth})_i (W_{L_1})_i \in R^{n \times n}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

که در این رابطه، W_{depth} ماتریس وزن‌دهی عمقی است (Li & Oldenburg, 1996; 1998):

$$(W_{depth})_i = diag \left(1 / (z_j + z_0)^{\beta(i)} \right) \quad (6)$$

که z_j میانگین عمق مکعب j ام، z_0 وابسته به ارتفاع برداشت داده و ضریب β وزن مناسب را اعمال می‌کند. ماتریس وزن‌دهی عمقی از این جهت حائز اهمیت است که در وارون‌سازی داده‌های مربوط به میدان پتانسیل مدل‌های بازسازی شده تمایل دارند؛ که نزدیک سطح متمرکز شوند. این به علت آن است که حساسیت کرنل با عمق کاهش می‌یابد. بنابراین به منظور کاهش این حساسیت و بازسازی مدل‌هایی که دارای گسترش عمقی هستند، ماتریس وزن‌دهی عمقی در وارون‌سازی داده‌های میدان پتانسیل کاربرد پیدا کرده است. انتخاب ضریب وزن‌دهی β باید با دقت انجام پذیرد. اگر مقدار آن بزرگ انتخاب شود به مکعب‌های عمیق‌تر وزن بیشتر می‌دهد و اگر کوچک انتخاب شود ماتریس وزن‌دهی عمقی فاقد کارایی لازم است. در رابطه (۵)، ماتریس $(W_{L_1})_i$ یک ماتریس قطری است که با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(W_{L_1})_i = diag \left(1 / \left((m^{(i)} - m_{apr}^{(i)})^2 + \varepsilon^2 \right)^{1/4} \right), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

این ماتریس در واقع از جایگزینی عبارت تنظیم نرم یک، $\| \tilde{m}^{(i)} - \tilde{m}_{apr}^{(i)} \|_2$ ، با عبارت تنظیم نرم دو، $\| \tilde{m}^{(i)} - \tilde{m}_{apr}^{(i)} \|_2^2$ ، پدیدار می‌گردد. جزئیات این جایگذاری در مقاله (Vatankhah et al., 2017). به تفصیل توضیح داده شده است. پارامتر ε یک عدد مثبت کوچک $0 < \varepsilon \ll 1$ انتخاب می‌شود. زمانی که ε کوچک باشد مدل حاصل تُنک خواهد بود، در حالی که برای مقادیر بزرگ آن مدل‌های هموار به دست می‌آید. در رابطه (۲) بردار داده‌های وزن‌دار $\tilde{d}^{(i)}$ ، بردار پارامترهای مدل وزن‌دار $\tilde{m}^{(i)}$ و بردار پارامترهای مدل اولیه وزن‌دار بر طبق روابط زیر می‌باشند:

$$\tilde{d}^{(i)} = W_d^{(i)} d_{obs}^{(i)} \quad (8)$$

$$\tilde{m}^{(i)} = W^{(i)} m^{(i)} \quad (9)$$

$$\ell_A^{(2)} = \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right) \left(\left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right)^t, \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right) \right) - \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right) \left(\left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right)^t, \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right) \right) \quad (22)$$

که در این روابط t بر ترانهاده دلالت دارد. برای حصول جواب نهایی در فضای اصلی، در هر تکرار، وارون ماتریس وزن دهی در نتیجه کمینه سازی ضرب می شود:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \left(W^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_{k+1} \quad (23)$$

همچنین بایست توجه داشت که در هر تکرار الگوریتم، کران های بالا و پایین برای پارامترهای مدل انتخاب می شوند. این انتخاب براساس اطلاعات موجود از زمین شناسی منطقه و ساختار مورد جستجو انجام می پذیرد. استفاده از این کران ها موجب کاهش شدید عدم یکتایی مساله و بهبود جواب های حاصل خواهد شد. فرایند تکرار الگوریتم وارون زمانی متوقف می شود که داده حاصل از مدل های تولید شده همزمان سطح نوفه مربوطه را برازش نمایند:

$$\phi(d^{(1)}) = \left\| \frac{A^{(1)} \mathbf{m}^{(1)} - d^{(1)}}{\sigma^{(1)}} \right\|_2 \leq m + \sqrt{2m} \quad (24)$$

$$\phi(d^{(2)}) = \left\| \frac{A^{(2)} \mathbf{m}^{(2)} - d^{(2)}}{\sigma^{(2)}} \right\|_2 \leq m + \sqrt{2m} \quad (25)$$

و یا آن که اختلاف بین داده های حاصل از مدل های تولید شده در تکرار k با تکرار $k-1$ و نیز تکرار $k-1$ با تکرار $k-2$ ، همزمان برای هر دو مجموعه داده، از مقدار 0.1 کوچک تر باشد (یعنی داده های پیش بینی شده در سه تکرار متوالی دارای اختلاف اندکی با یکدیگر باشند).

۳- کاربرد الگوریتم بر روی مدل مصنوعی

۳-۱- مدل مصنوعی اول

برای بررسی کارایی الگوریتم وارون سازی ارائه شده، مدل مصنوعی شامل یک دایک قائم و یک دایک شیب دار تولید گردید (شکل ۱- الف و ب). هر دو دایک به ترتیب دارای تباين چگالی (g/cm^3) ۱ و خودپذیری مغناطیسی (SI) 0.1 با محیط پیرامون خود می باشند. عمق بالای هر دو دایک ۵۰ متر می باشد اما دایک شیب دار تا عمق ۳۰۰ متر و دایک قائم تا ۲۰۰ متر امتداد یافته است. برای نمایش مدل های شکل (۱- الف و ب) از یک برش عمودی در راستای شمال و به فاصله ۴۷۵ متری از مبدأ استفاده شد. آنومالی گرانی و مغناطیسی حاصل از این مدل ها، d^{exat} ، در یک شبکه منظم شامل $40 \times 20 = 800$ داده با فواصل ۵۰ متر در سطح زمین تولید شدند. برای تولید داده مغناطیسی، زاویه انحراف مغناطیسی $D = 45^\circ$ ، زاویه میل مغناطیسی $I = 45^\circ$ و شدت میدان مغناطیسی (nT) ۵۰۰۰۰ در نظر گرفته می شود. برای نزدیک کردن به

بنابراین پارامترهای $q^{(1)}$ و $q^{(2)}$ محاسبه شده به این روش، برای کاهش پارامتر $\alpha^{(i)}$ به کار می روند. به دلیل آن که ترجیح بر آن است که روند تدریجی برای کاهش پارامترهای تنظیم صورت بپذیرد، بنابراین برای این دو پارامتر، بازه های $q_1 \in [0.9, 1]$ و $q_2 \in [0.95, 1]$ به عنوان بازه مجاز انتخاب می گردند. چنانچه در طول تکرارهای الگوریتم ضرائبی که با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) محاسبه می شوند، کوچک تر از کران پایین مربوطه باشد، آن مقدار برابر کران قرار داده می شود. پارامتر λ در طول فرآیند وارون سازی یک مقدار ثابت در نظر گرفته می شود.

به منظور رسیدن به جواب مساله وارون توامان، رابطه (۲) باید کمینه شود. به علت وجود قید گرامیان و نیز ماتریس وزن دهی $W^{(i)}$ ، که هر دو وابسته به پارامترهای مدل هستند، این تابع هدف غیر خطی است و بنابراین باید از روش مناسبی برای کمینه سازی آن استفاده کرد. در این تحقیق روش $RRCG$ برای کمینه سازی تابع هدف به کار می رود. این شیوه یک الگوریتم کمینه سازی گرادیان مزدوج بر مبنای تکرار است. دلیل نام گذاری به این نام آن است که ماتریس $W^{(i)}$ در هر تکرار الگوریتم وارون، با استفاده از مقادیر پارامترهای مدل به دست آمده در تکرار قبل بهنگام می شود. برای جزئیات بیشتر به (Portniaguine & Zhdanov, 2002) و (Zhdanov, 2002) مراجعه شود. الگوریتم $RRCG$ برای کمینه سازی تابع هدف رابطه (۲) را می توان به صورت زیر خلاصه کرد که اندیس k دلالت به تکرار دارد:

$$\begin{aligned} r_k &= \tilde{A}_k \tilde{\mathbf{m}}_k - \tilde{\mathbf{d}}, \\ \ell_k &= \tilde{A}_k^t r_k + \alpha_k (\tilde{\mathbf{m}}_k - \tilde{\mathbf{m}}_{apr}) + \lambda_k (\ell_{A_k}), \\ \tilde{\ell}_k &= \ell_k + \frac{\|\ell_k\|^2}{\|\ell_{k-1}\|} \tilde{\ell}_{k-1}, \quad \tilde{\ell}_k = \ell_0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &= (\tilde{\ell}_k, \ell_k) / \left[\|\tilde{A}_k \tilde{\ell}_k\|_2^2 + \alpha_k \|\tilde{\ell}_k\|_2^2 + \lambda_k \|\ell_k\|_2^2 \right], \\ \tilde{\mathbf{m}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{m}}_k - \tilde{S}_k \tilde{\ell}_k, \end{aligned}$$

که در این روابط

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{obs}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{obs}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

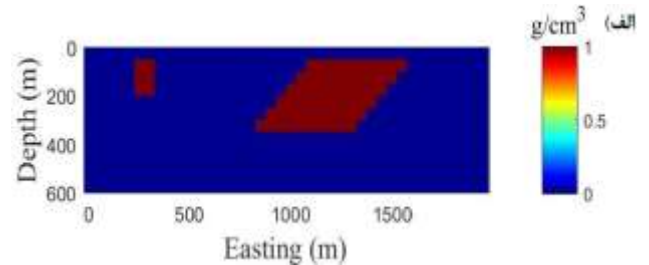
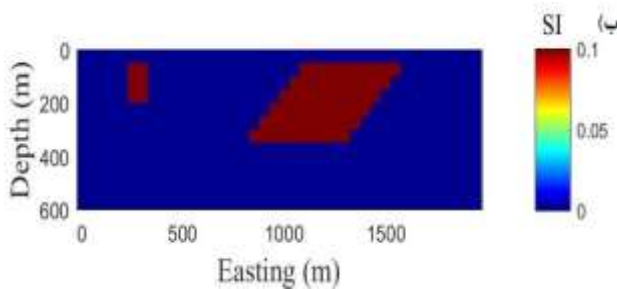
$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

می باشند. در رابطه (۱۷) راستاهای سریع ترین افزایش توابع پایدارکننده گرامیان، ℓ_G ، از روابط زیر محاسبه می شوند:

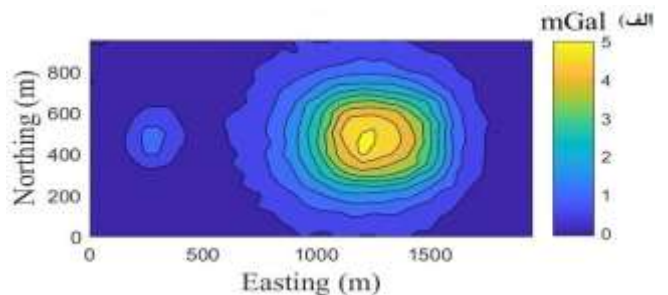
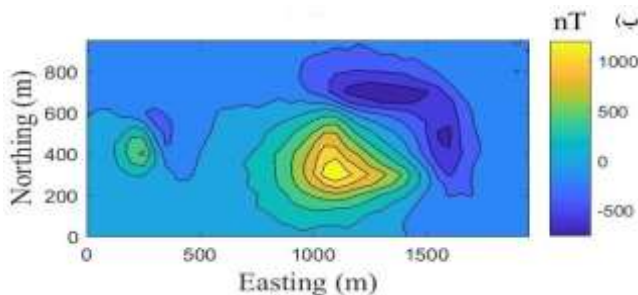
$$\begin{aligned} \ell_A^{(1)} &= \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right) \left(\left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right)^t, \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right) \right) \\ &\quad - \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right) \left(\left(\tilde{\mathbf{m}}^{(1)} \right)^t, \left(\tilde{\mathbf{m}}^{(2)} \right) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

می‌شوند. شکل (۲- الف و ب) داده‌های آمیخته به نطفه تولید شده را نشان می‌دهند.

حالت واقعی یک نطفه گوسی با انحراف معیار $\left(\tau^{(1)} \left| \left(d^{exat} \right)^{(i)} \right| + \tau^{(2)} \max \left(\left| \left(d^{exat} \right)^{(i)} \right| \right) \right)$ به داده‌ها اضافه گردید. برای هر دو نوع داده پارامترهای $\tau^{(1)}$ و $\tau^{(2)}$ برابر ۰/۱ انتخاب



شکل ۱: مدل مصنوعی شامل یک دایک قائم و یک دایک شیب‌دار. الف) تباین چگالی (g/cm^3)؛ ب) تباین خودپذیری مغناطیسی (SI) ۰/۱.



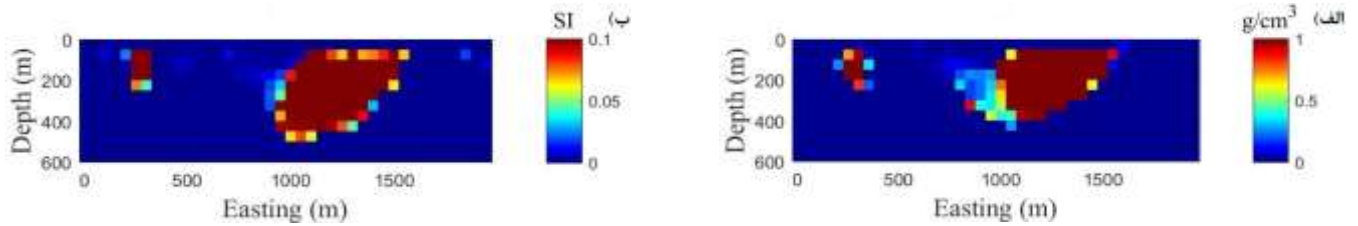
شکل ۲: داده‌های تولید شده به وسیله مدل شکل ۱ و آمیخته به نطفه. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.

در ابتدا الگوریتم وارون‌سازی با مقدار $\lambda = 0$ اجرا می‌گردد. این بدان مفهوم است؛ که قید گرمایان در اجرای الگوریتم مورد استفاده قرار نمی‌گیرد اما بقیه عبارت‌ها به کار برده می‌شوند. الگوریتم پس از ۷۷ تکرار متوقف می‌شود. شکل (۳- الف و ب) به ترتیب مدل‌های چگالی و خودپذیری مغناطیسی بازسازی شده را نشان می‌دهد. این مدل‌ها دارای تطابق مناسبی با مدل اولیه هستند و بنابراین از لحاظ ژئوفیزیکی قابل قبول می‌باشند. مشخص است که هر دو مدل فشرده بوده و دارای مرز شارپ و گسسته با محیط پیرامونی خود می‌باشند که همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد به دلیل استفاده از ماتریس قطری W_{L1} می‌باشد. شکل (۴- الف) داده حاصل از مدل بازسازی شده برای چگالی و شکل (۴- ب) داده میدان مغناطیسی کل حاصل از مدل بازسازی شده برای خودپذیری مغناطیسی را نشان می‌دهد. هر دو داده در تطابق خوبی با داده‌های مشاهده‌ای می‌باشند. همچنین شکل ۵ توزیع چگالی بر حسب خودپذیری مغناطیسی، در فضای پارامترهای مدل وزن‌دار، را نشان می‌دهد و مشخص است که همبستگی زیادی بین چگالی و خودپذیری مغناطیسی وجود ندارد.

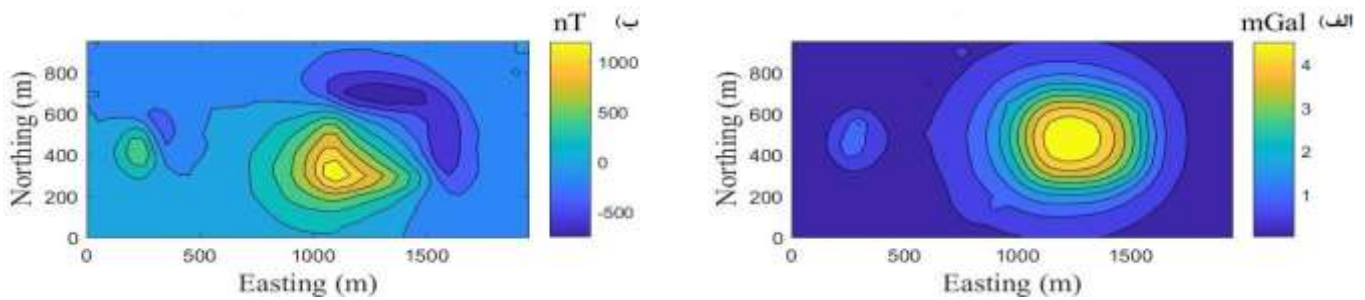
به منظور اجرای الگوریتم وارون‌سازی، زیر سطح ناحیه برداشت به وسیله $40 \times 20 \times 12 = 9600$ مکعب تا عمق ۶۰۰ متری گسسته‌سازی می‌گردد. ابعاد هر مکعب ۵۰ متر انتخاب شده است. برای شروع وارون‌سازی پارامترهای تنظیم به ترتیب برابر $\alpha^{(1)} = 20000$ و $\alpha^{(2)} = 40000$ انتخاب می‌شوند. به دلیل خواص طیفی متفاوتی که ماتریس‌های $A^{(1)}$ و $A^{(2)}$ دارند، مقدار پارامتر تنظیم برای وارون‌سازی داده‌های مغناطیسی در مقایسه با وارون‌سازی داده‌های گرانی باید خیلی بزرگ‌تر باشد (Vatankhah et al., 2020). با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل بیان گردید، مقادیر پارامترهای تنظیم در تکرارهای بعد کاهش می‌یابند. مقدار پارامتر λ نیز ثابت در نظر گرفته می‌شود. کران بالا و پایین برای چگالی بین ۰ و ۱ و برای خودپذیری مغناطیسی بین ۰ و ۰/۱ انتخاب شده است. همچنین بیشینه تکرارها بر روی $k_{max} = 100$ تنظیم شده است.

۳-۱-۱ اجرای الگوریتم وارون‌سازی با $\lambda = 0$

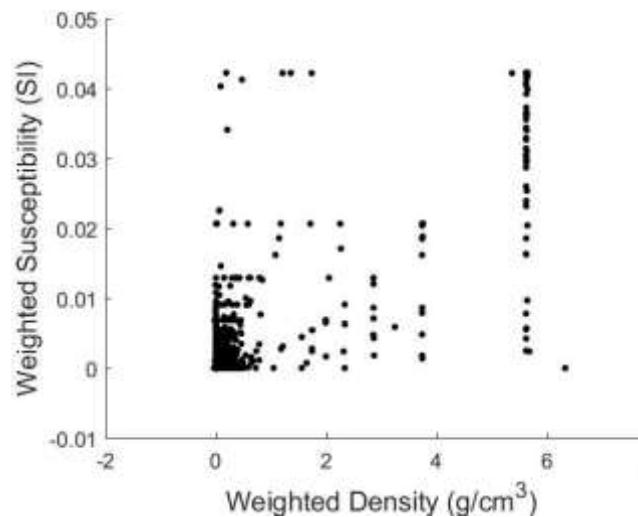
قارلقی و همکاران، وارون سازی توامان سه بعدی داده های گرانی و مغناطیس با استفاده از قید گرامیان و پایدار کننده نرم یک، صفحات ۴۵-۶۰.



شکل ۳: مدل های بازسازی شده از اجرای الگوریتم وارون سازی توامان بر روی داده های شکل ۲ با مقدار $\lambda = 0$. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



شکل ۴: داده های تولید شده توسط مدل های بازسازی شده شکل ۳. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.

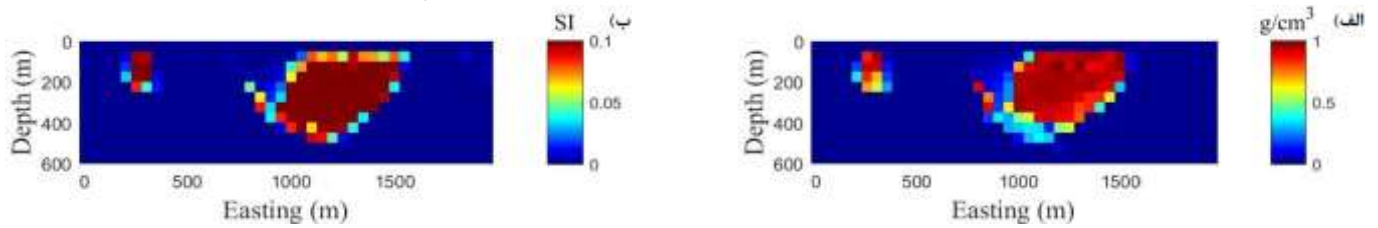


شکل ۵: نمودار توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فضای پارامترهای مدل وزن دار برای مدل های بازسازی شده در شکل ۳.

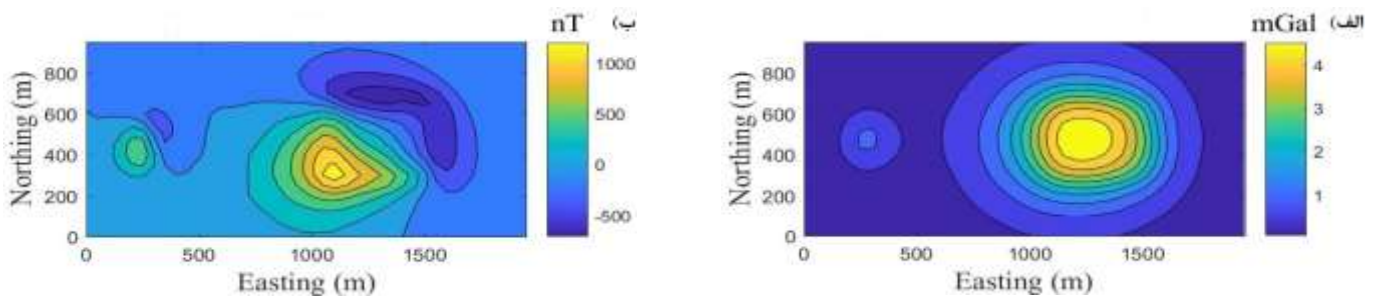
دو مدل بازسازی شده در این حالت است که نتیجه کاربرد قید گرامیان در الگوریتم وارون می باشد. شکل (۷- الف و ب) داده های حاصل از مدل های بازسازی شده را نشان می دهد. شکل ۸ توزیع چگالی بر حسب خودپذیری مغناطیسی را در فضای پارامترهای مدل وزن دار نشان می دهد. کاملاً مشخص است که همبستگی بین چگالی و خودپذیری مغناطیسی با اعمال قید گرامیان افزایش محسوسی پیدا کرده است.

۳-۱-۲ اجرای الگوریتم وارون سازی با $\lambda = 1500$

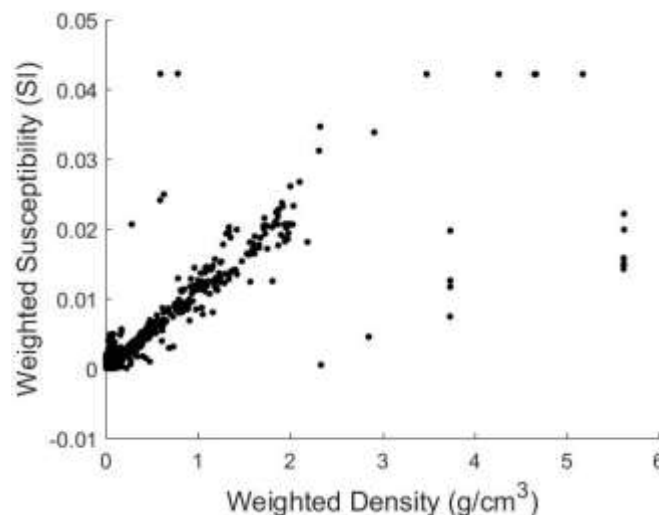
در گام بعدی وارون سازی توامان با پارامتر λ برابر ۱۵۰۰ انجام می پذیرد. الباقی پارامترها مشابه با حالت قبل می باشند. الگوریتم پس از ۹۲ تکرار متوقف می شود. شکل (۶- الف و ب) به ترتیب مدل های چگالی و خودپذیری مغناطیسی حاصل را نشان می دهد. همانند مدل های بازسازی شده در شکل های (۳- الف و ب)، این مدل ها نیز دارای مرز گسسته با محیط پیرامون هستند. نکته مهم شباهت بین



شکل ۶: مدل‌های بازسازی شده از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توامان بر روی داده‌های شکل ۲ با مقدار $\lambda = 1500$. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



شکل ۷: داده‌های تولید شده توسط مدل‌های بازسازی شده در شکل ۶. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.



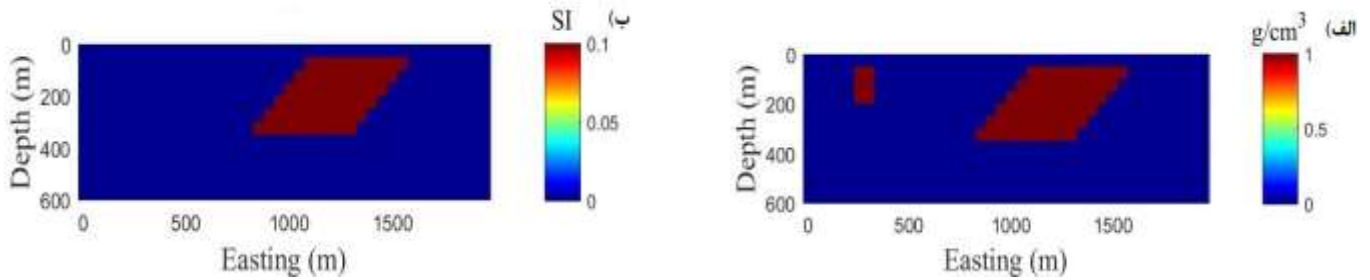
شکل ۸: نمودار توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فضای پارامترهای مدل وزن‌دار برای مدل‌های بازسازی شده در شکل ۶.

متر در سطح زمین تولید می‌گردند. این داده‌ها با افزودن نوفه گوسی، برای استفاده در الگوریتم وارون‌سازی توامان آماده می‌شوند. شکل‌های (۱۰- الف و ب) داده‌های آمیخته به نوفه تولید شده را نمایش می‌دهند. همانطور که مشخص است اثر دایک قائم در داده گرانی وجود دارد، اما در داده مغناطیسی هیچ گونه اثری از این دایک موجود نیست.

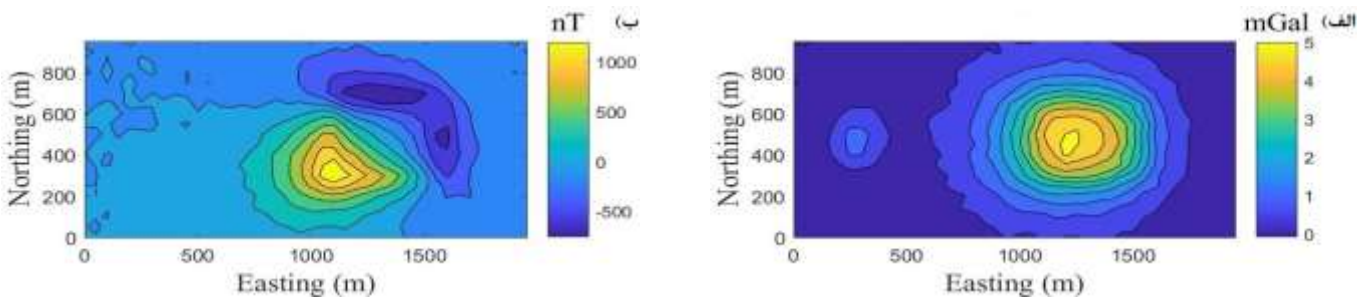
۳-۲ مدل مصنوعی دوم

مدل دوم دقیقاً مشابه با مدل قبل انتخاب می‌گردد با این تفاوت که دایک قائم دیگر مغناطیده نیست (شکل ۹). هدف آن است که توانایی الگوریتم هنگامی که ساختار زیرسطحی فقط دارای یک نوع خاصیت فیزیکی باشد، مورد بررسی قرار گیرد. داده‌های گرانی و مغناطیسی برای این مدل‌ها در یک شبکه منظم شامل $40 \times 20 = 800$ داده با فواصل ۵۰

قارلقی و همکاران، وارون سازی توامان سه بعدی داده های گرانی و مغناطیس با استفاده از فید گرامیان و پایدار کننده نرم یک، صفحات ۴۵-۶۰.



شکل ۹: مدل مصنوعی دوم. الف) تباین چگالی (g/cm^3)؛ ب) تباین خودپذیری مغناطیسی (SI) ۰/۱.

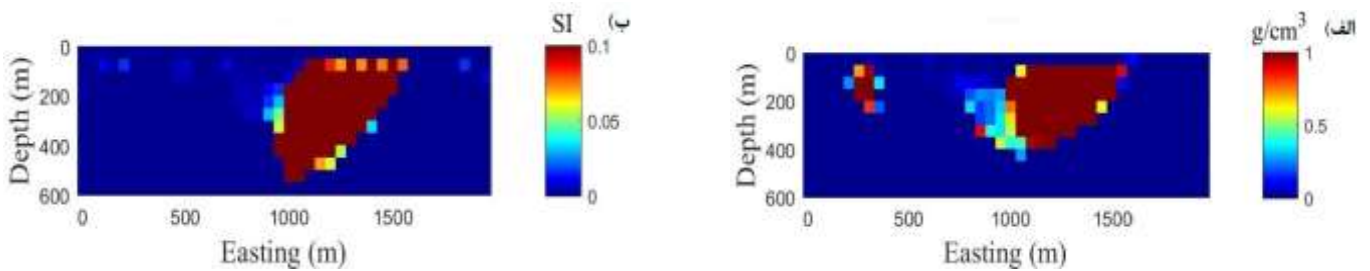


شکل ۱۰: داده های تولید شده توسط مدل شکل ۹ و آمیخته به نوفه. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.

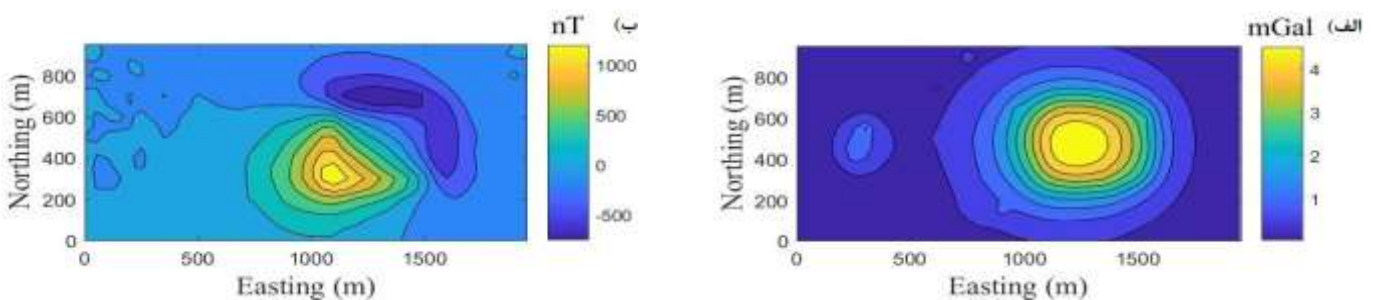
مغناطیسی بازسازی شده را نشان می دهند. دایک قائم در مدل چگالی، بازسازی شده است؛ اما در مدل خودپذیری مغناطیسی اثری از آن وجود ندارد. این مورد کاملاً منطقی و مورد انتظار است به دلیل آن که اثری از این دایک در داده مغناطیسی وجود ندارد. شکل (۱۲- الف و ب) داده های حاصل از این مدل بازسازی شده را نشان می دهد. شکل ۱۳ توزیع چگالی بر حسب خودپذیری مغناطیسی را در فضای پارامترهای مدل وزن دار نشان می دهد.

۳-۲-۱ اجرای الگوریتم وارون سازی با $\lambda = 0$

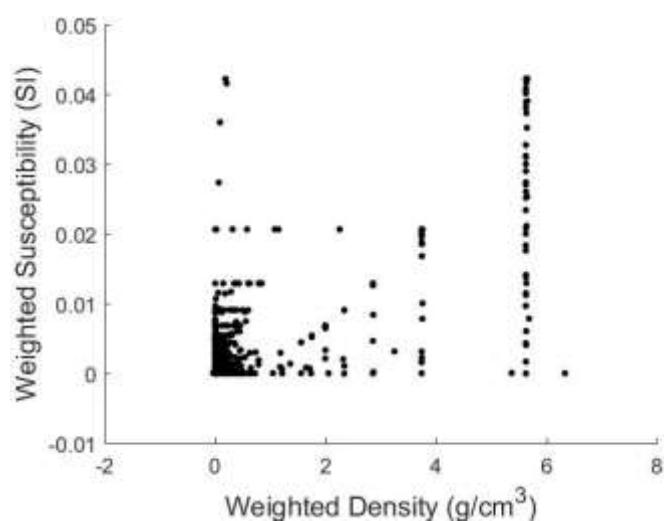
مشابه با حالت قبل، زیر سطح ناحیه برداشت توسط $40 \times 20 \times 12 = 9600$ پارامترهای تنظیم و بقیه پارامترهای مورد نیاز برای وارون سازی، همانند مدل اول انتخاب می گردند. در ابتدا الگوریتم با استفاده از $\lambda = 0$ اجرا می گردد. پس از ۷۷ تکرار، وارون سازی متوقف می شود. شکل (۱۱- الف و ب)، به ترتیب مدل های چگالی و خودپذیری



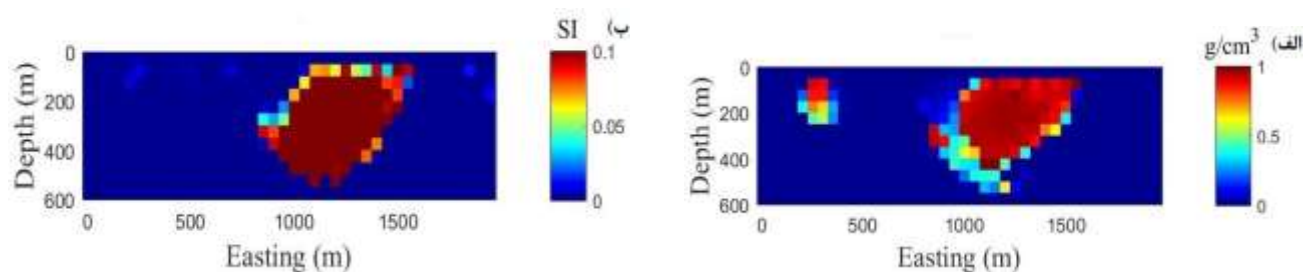
شکل ۱۱: مدل های بازسازی شده از اجرای الگوریتم وارون سازی توامان بر روی داده های شکل ۱۰ با مقدار $\lambda = 0$. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



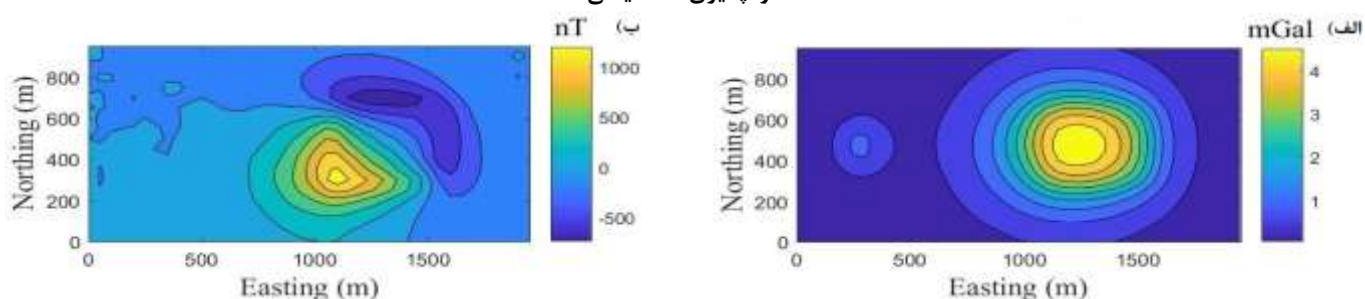
شکل ۱۲: داده های تولید شده توسط مدل های بازسازی شده در شکل ۱۱. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.



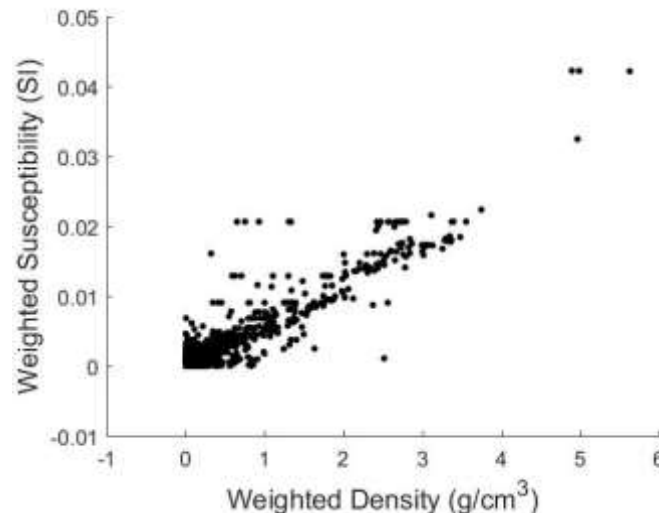
شکل ۱۳: نمودار توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فضای پارامترهای مدل وزن‌دار برای مدل‌های بازسازی شده در شکل ۱۱.



شکل ۱۴: مدل‌های بازسازی شده از اجرای الگوریتم وارون‌سازی توامان بر روی داده‌های شکل ۱۰ با مقدار $\lambda = 1500$. الف) توزیع چگالی؛ ب) توزیع خودپذیری مغناطیسی.



شکل ۱۵: داده‌های تولید شده توسط مدل‌های بازسازی شده در شکل ۱۴. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.



شکل ۱۶: نمودار توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی در فضای پارامترهای مدل وزن دار برای مدل های بازسازی شده در شکل ۱۴.

مغناطیس مربوط به کانسار آهن واقع در شمال غرب چین اجرا می گردد.

۴-۱ زمین شناسی ناحیه مورد مطالعه

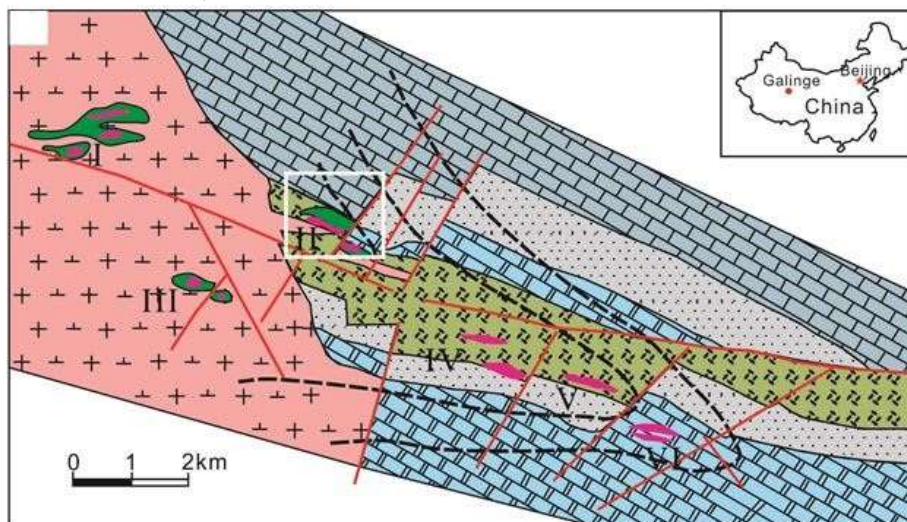
رسوبات سنگ آهن گالینژ در مرکز کمربند متالوژنی کیمانتج یکی از معروف ترین ذخایر اسکارن آهن در استان چینگهای واقع در شمال غربی کشور چین می باشد. شکل ۱۷ نقشه زمین شناسی مربوط به این ناحیه را نشان می دهد. در این کانسارها سنگ بستر توسط لایه های به ضخامت ۱۱۷-۲۱۰ متر از ماسه سنگ های دوران کواترنری پوشانده شده است (شکل ۱۸). توالی چینه های تعیین شده، لایه های رسوبی شیب دار موازی، سنگ های آتشفشانی و زیر آتشفشانی مهم ترین عوامل موثر در تشکیل کانسار آهن در این ناحیه می باشد. مواد معدنی عمدتاً شامل مگنتیت و مقدار کمی هماتیت و سیدریت می باشد (Liu et al., 2020). در این ناحیه کانسارهای آهن احتمالاً به وسیله فوران های آتشفشانی و رسوب گذاری متوالی به وجود آمده اند. بررسی های اولیه در این ناحیه تباین چگالی و خودپذیری کاملاً بارزی بین توده معدنی و سنگ های در برگیرنده را نشان می دهد.

۳-۲-۲ اجرای الگوریتم وارون سازی با $\lambda = 1500$

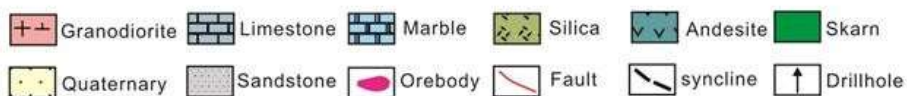
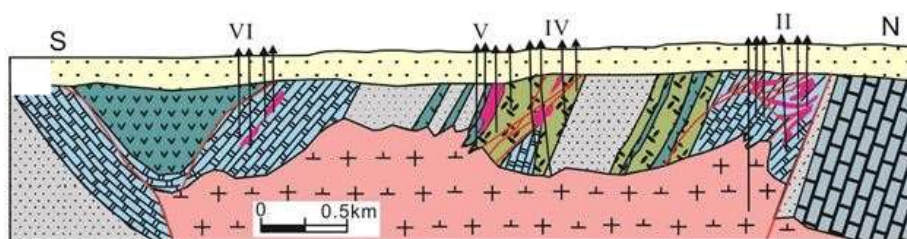
شکل (۱۴-الف و ب) به ترتیب مدل های چگالی و خودپذیری مغناطیسی حاصل از اجرای الگوریتم با پارامتر $\lambda = 1500$ را نشان می دهند. تعداد تکرارهای مورد نیاز برای اجرای الگوریتم ۷۲ می باشد. شباهت مدل ها در مقایسه با حالت قبل افزایش یافته است که نتیجه کاربرد قید گرامیان می باشد. نکته مهم آن است که دایک قائم در مدل چگالی بازسازی شده است اما در مدل خودپذیری مغناطیسی وجود ندارد. این نتیجه به وضوح دلالت بر آن دارد که هرچند قید گرامیان سبب افزایش شباهت بین مدل ها می شود؛ اما در صورتی که ساختاری صرفاً یک نوع توزیع فیزیکی داشته باشد (اثر ساختار فقط در یک نوع داده موجود باشد)، الگوریتم به درستی فقط توزیع فیزیکی موجود را بازسازی کرده و از به وجود آمدن ساختارهای اضافه در مدل های دیگر اجتناب می گردد. شکل (۱۵-الف و ب) داده های حاصل از مدل های بازسازی شده را نشان می دهد. همچنین شکل ۱۶ توزیع چگالی بر حسب خودپذیری مغناطیسی را برای پارامترهای مدل وزن دار نشان می دهد.

۴- داده واقعی

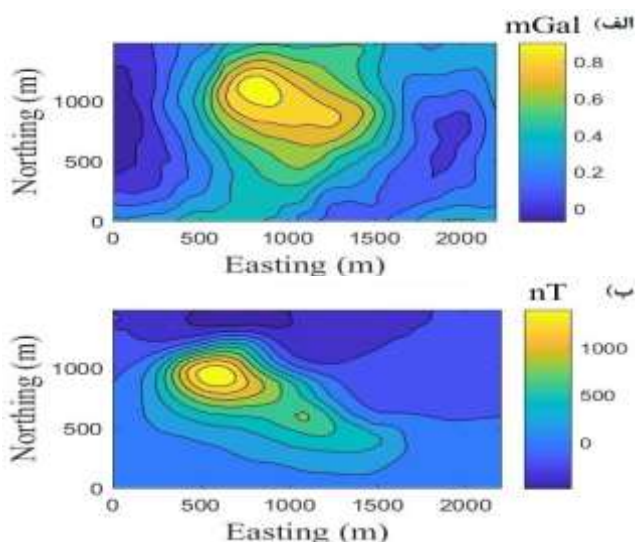
در این بخش الگوریتم وارون سازی توامان بر روی داده گرانی و



شکل ۱۷: نقشه زمین‌شناسی مربوط به رسوبات سنگ آهن گالینز در شمال غرب چین. مستطیل سفید ناحیه مورد بررسی ژئوفیزیکی را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۸: سطح مقطع از نقشه زمین‌شناسی نشان داده شده در شکل (۱۷) که سنگ بستر، توده‌های معدنی و سنگ‌های پیرامونی در آن نمایش داده شده‌اند.



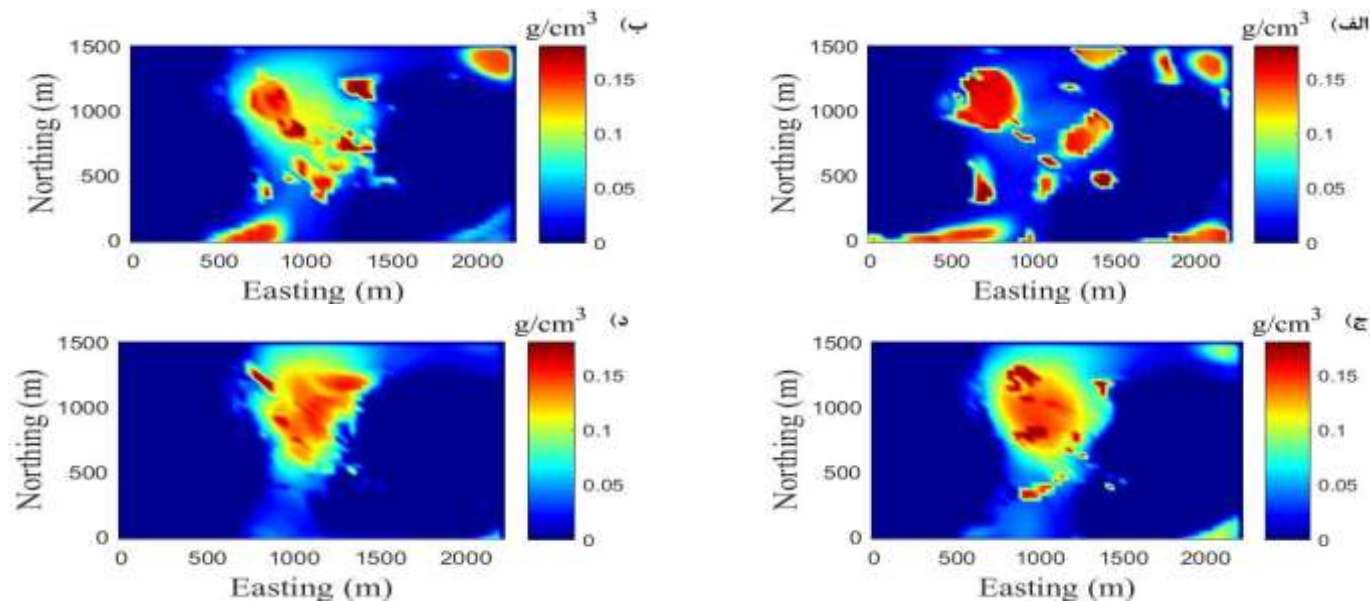
شکل ۱۹: داده مشاهده‌ای بر روی ناحیه مورد بررسی (مستطیل سفید رنگ در شکل ۱۷) مربوط به کانسار آهن گالینز در استان چینگهای کشور چین. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.

۴-۲ آنومالی‌های گرانی و مغناطیسی مشاهده‌ای

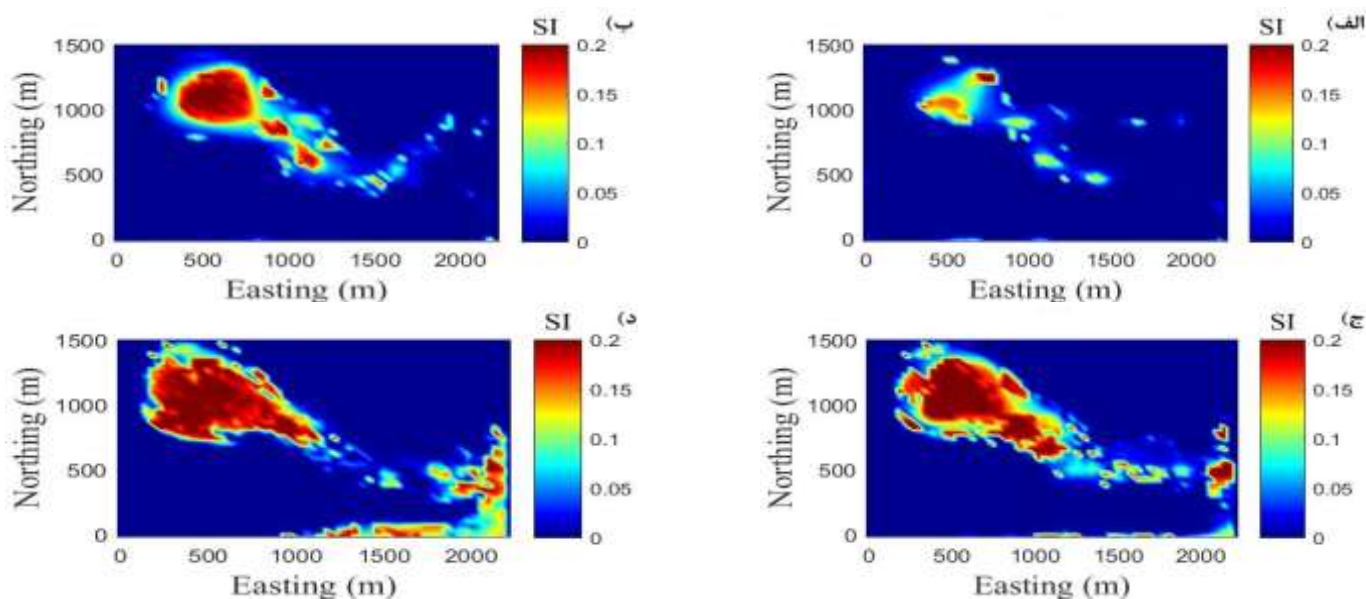
داده‌های گرانی و مغناطیس برداشت شده در ناحیه مورد بررسی در شبکه‌ای متشکل از 2128×56 داده با فواصل ۴۰ متری آماده وارون‌سازی گردیدند (شکل ۱۹). در این ناحیه شدت میدان ژئومغناطیسی 53800 nT ، زاویه میل مغناطیسی 56° و زاویه انحراف مغناطیسی 4° می‌باشد. انحراف معیار نوفه برای این داده‌ها به صورت $\left(\tau^{(1)} \left| (d^{obs})^{(i)} \right| + \tau^{(2)} \max \left(\left| (d^{obs})^{(i)} \right| \right) \right)$ در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای $(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$ برای داده‌های گرانی و مغناطیس به ترتیب $(0.01, 0.0)$ و $(0.01, 0.035)$ انتخاب می‌شوند. آنومالی میدان مغناطیسی دلالت بر یک توده کاملاً مجزا با کشیدگی در راستای شمال غرب - جنوب شرق دارد. در حالیکه آنومالی گرانی گسترش‌هایی در راستاهای شمال و جنوب نشان می‌دهد. بنابراین این دو آنومالی تفاوت‌هایی با یکدیگر دارند که کار تفسیر را دشوارتر می‌سازد.

۳-۵ نتايج حاصل از وارون سازى

براي اجراى الگوريتم وارون سازى، سطح زيرين در ناحيه برداشت توسط $56 \times 38 \times 15 = 31920$ مكعب با ابعاد ۴۰ متر مدل سازى مى گردد. با توجه به اطلاعات اوليه از اين ناحيه، كرانه هاى پايين و بالا براي چگالي ۰ و 0.18 و براي خودپذيري مغناطيسي ۰ و 0.2 انتخاب گرديد (Liu et al., 2020). همچنين بيشينه تكرارها $k_{max} = 100$ ، پارامترهاي تنظيم برابر با $\alpha^{(1)} = 20000$ ، $\alpha^{(2)} = 40000$ و $\lambda = 3000$ در نظر گرفته شدند. الگوريتم پس از ۷۱ تكرار متوقف شد. شكل هاي ۲۰ و ۲۱ به ترتيب سطح مقطع هايي از مدل هاي بازسازي شده براي چگالي و



شكل ۲۰: مدل چگالي بازسازي شده به وسيله الگوريتم وارون سازى توامان. سطح مقطع در عمق الف (۱۶۰ متری؛ ب) (۳۰۰ متری؛ ج) (۴۴۰ متری؛ د) ۵۵۰ متری.

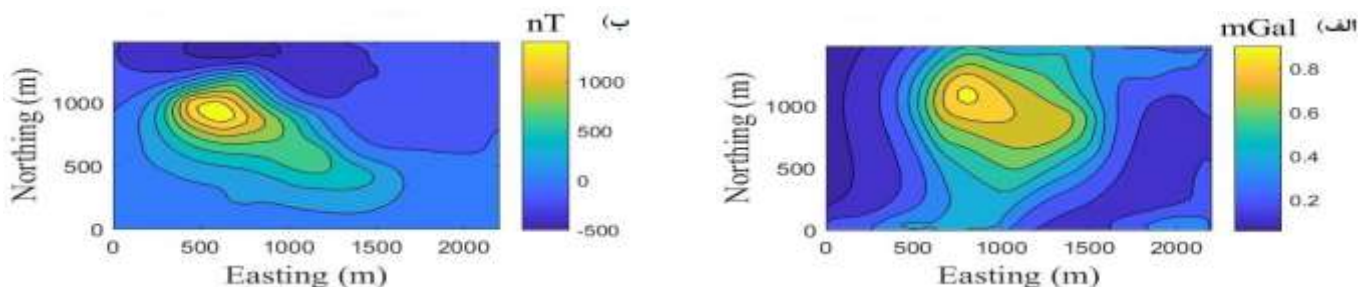


شكل ۲۱: مدل خودپذيري مغناطيسي بازسازي شده توسط الگوريتم وارون سازى توامان. سطح مقطع در عمق الف (۱۶۰ متری؛ ب) (۳۰۰ متری؛ ج) (۴۴۰ متری؛ د) ۵۵۰ متری.

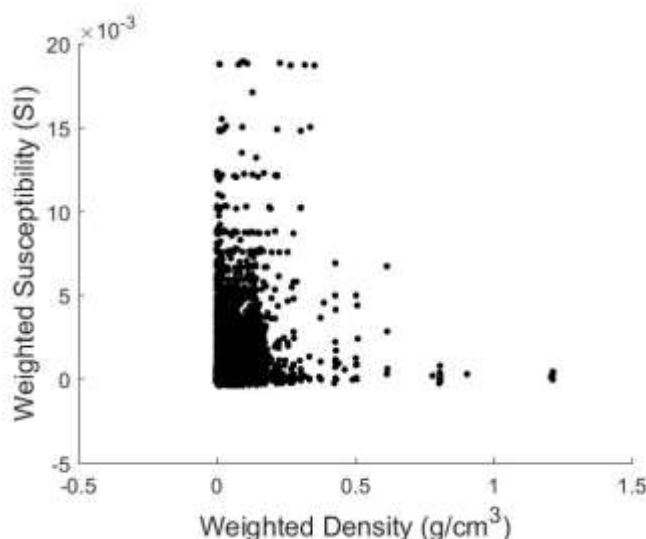
خودپذيري مغناطيسي را نشان مى دهند. مقاطع در اعماق ۱۶۰، ۳۰۰، ۴۴۰ و ۵۵۰ متری زده شده اند. گسترش و عمق توده در مدل مغناطيسي، در مقايسه با مدل چگالي، بهتر نشان داده شده است. همان طور كه در بخش قبل بيان گرديد در اين ناحيه آنومالي گراني داراي بي هنجاري هاي اضافي، در مقايسه با آنومالي مغناطيسي، است بنابر اين انتظار تفاوت در مدل هاي بازسازي شده وجود دارد. به هر حال همان طور كه در مدل هاي مصنوعي نشان داده شد، كاربرد قيد گراميان به شباهت بيشتر مدل ها، تا حدى كه برازش داده ها نيز لحاظ گردد، منتهى مى شود. مدل هاي بازسازي شده انطباق قابل قبولي با نتايج حفارى و بررسى هاي پيشين دارند (Liu et al., 2020).

شکل ۲۳ توزیع چگالی بر حسب خودپذیری مغناطیسی را برای پارامترهای مدل وزن دار نشان می‌دهد.

شکل ۲۲ داده‌های تولید شده توسط مدل‌های شکل ۲۰ و ۲۱ را نشان می‌دهد که در تطابق خوبی با داده مشاهده‌ای می‌باشند. در نهایت



شکل ۲۲: داده‌های تولید شده توسط مدل‌های بازسازی شده شکل ۲۰ و ۲۱. الف) داده گرانی؛ ب) داده میدان مغناطیسی کل.



شکل ۲۳: نمودار توزیع چگالی و خودپذیری مغناطیسی برای پارامترهای مدل وزن دار بازسازی شده در شکل‌های ۲۰ و ۲۱.

۵- نتیجه‌گیری

عمق و مقدار خاصیت فیزیکی توده‌های زیر سطحی داشت. به منظور تخمین وزن‌های مربوط به عبارت‌های تنظیم و قید گرامیان، شیوه‌ای موثر ارائه گردید. در تکرار اول پارامترهای مربوط به عبارت‌های تنظیم برابر با یک مقدار بزرگ انتخاب گردیدند، سپس در تکرارهای بعدی این پارامترها با ضریبی کاهش یافتند. مقدار این ضریب متناسب با فاصله توابع عدم انطباق در تکرار حاضر با مقادیر هدف آنها، تنظیم گردید. پارامتر وزن‌دهی برای قید گرامیان در طول فرآیند وارون‌سازی ثابت در نظر گرفته شد. در نهایت الگوریتم وارون‌سازی توامان بر روی داده‌های گرانی و مغناطیسی برداشت شده مربوط به یک کانسار آهن در ناحیه‌ای در شمال غربی چین مورد استفاده قرار گرفت. مدل خودپذیری مغناطیسی بازسازی شده، توزیعی از یک توده همگن در راستای شمال غربی - جنوب شرقی نتیجه داد، در حالی که مدل چگالی ساختارهایی در شمال و جنوب نیز بازسازی کرد.

در این مقاله الگوریتم وارون‌سازی توامان داده‌های گرانی و مغناطیس با استفاده از قید گرامیان و در فضای پارامترهای مدل وزن دار مورد استفاده قرار گرفت. با کاربرد پایدار کننده تُرم یک در عبارت تنظیم، الگوریتم این توانایی را یافت تا به بازسازی مدل‌هایی فشرده دارای مرزهای گسسته با محیط پیرامونی بپردازد. الگوریتم بر روی دو نمونه مدل مصنوعی متفاوت به کار برده شد. نتایج نشان داد که با کاربرد قید گرامیان همبستگی خطی بین پارامترهای مدل مختلف، و یا تبدیلات این پارامترها، افزایش محسوسی می‌یابد. البته این همبستگی تا حدی است؛ که همزمان توسط داده‌های مشاهده‌ای نیز حمایت شود. هنگامی که برخی از بی‌هنجاری‌ها صرفاً در یک نوع داده وجود داشته باشد، الگوریتم اجباری برای بیش از حد شبیه کردن مدل‌های ساخته‌شده ندارد. همچنین به منظور اجتناب از تمرکز مدل‌ها در نزدیکی سطح زمین، ماتریس وزن‌دهی عمقی در الگوریتم وارون‌سازی توامان مورد استفاده قرار گرفت. نتایج دلالت بر توانایی الگوریتم در تعیین شکل،

۶- منابع

- Nabighian, M. N., Ander, M. E., Grauch, V. J. S., Hansen, R. O., LaFehr, T. R., Li, Y., Pearson, W. C., Peirce, J. D. and Ruder, M.E., 2005, Historical development of the gravity method in exploration, *Geophysics*, **70** (6), pp. 63ND-89ND.
- Portniaguine, O., and Zhdanov, M. S., 1999, focusing geophysical inversion images, *Geophysics*, **64**, 874-87.
- Vatankhah, S., Renaut, R. A and Ardestani, V. E., 2017, 3D Projected L_1 inversion of gravity data using truncated unbiased predictive risk estimator for regularization parameter estimation. *Geophysical Journal International*, **210** (3), 1872-1887.
- Vatankhah, S., Liu, S., Renaut, R. A., Hu, Xi and Baniamerian, J., 2020, Improving the use of the randomized singular value decomposition for the inversion of gravity and magnetic data, *Geophysics*, **85**, G93- G107.
- Zhdanov, M. S., 2002, *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*: Elsevier Press.
- Zhdanov, M. S., Gribenko, A., and Wilson, G., 2012, Generalized joint inversion of multimodal geophysical data using Gramian constraints, *Geophys, Res, Lett*, **39** (9).
- Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Gallardo, L. A., and M. A. Meju., 2004, Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints: *Journal of Geophysical Research*, **109**, B03311.
- Hansen, P. C., 1992, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Review*, **34**, 561-580.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1996, 3-D inversion of magnetic data, *Geophysics*, **61**, 394-408.
- Li, Y., and Oldenburg, D. W., 1998, 3D inversion of gravity data, *Geophysics*, **63**, 109-19.
- Lin, W and Zhdanov, M.S., 2018, Joint multinary inversion of gravity and magnetic data using Gramian constraints, *Geophys, J. Int.*, (2018) **215**, 1540-1557.
- Liu, S., Baniamerian, J and Fedi, M., 2020, Imaging Methods Versus Inverse Methods: An Option or An Alternative?, *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing PP* (99): 1-11.