



وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای برای تخمین مدل سرعت به کمک ترکیب منظم‌سازهای تیخنوف و تغییرات کلی

محمد الرجاوی^۱، حمید رضا سیاه کوهی^{۲*} و علی غلامی^۳

۱- دانشجوی دکتری، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

۲- استاد، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

۳- دانشیار، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۱۸؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۲۵

* نویسنده مسئول مکاتبات: hamid@ut.ac.ir

واژگان کلیدی

چکیده

روش‌های وارون برای حل مسائل در شاخه‌های علمی مختلفی بکار برده می‌شوند؛ اما شرایط حاکم بر داده‌های ژئوفیزیکی استفاده از این روش‌ها را پیچیده می‌کند. این شرایط را می‌توان به تکرار ناپذیری برداشت داده‌های ژئوفیزیکی به علت هزینه‌های بالای عملیات و نیز تأخیری که گسسته سازی روی حل مسئله اعمال می‌نماید، دانست. به طور کلی مسائل وارون در ژئوفیزیک در زمره مسائل بد وضع دسته‌بندی می‌شوند. این بدان معناست که برای انتخاب پاسخ مناسب منظم‌سازی و اعمال شرایطی منطبق با اصول فیزیکی حاکم بر مسئله لازم است. تخمین مدل سرعت از وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای از جمله این مسائل در لرزه‌شناسی است. منظم‌ساز تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات کلی از جمله روش‌های مرسوم برای حل این‌گونه مسائل هستند. روش اول توانمندی بالایی در بازسازی سیگنال‌های هموار دارد؛ ولی ناپیوستگی‌ها و لبه‌های سیگنال را به خوبی بازیافت نمی‌کند. در مقابل روش دوم به خوبی قادر به بازسازی لبه‌های سیگنال است؛ ولی بخش‌های هموار را دچار اعوجاج می‌کند. در این مقاله یک روش منظم‌سازی بر اساس ترکیب روش‌های حل تیخنوف درجه دوم و تغییرات کلی بیان می‌شود. در این مطالعه برای تخمین مدل سرعت از زمان رسید امواج لرزه‌ای در پروفیل لرزه‌ای قائم توانمندی روش‌های منظم‌ساز مرسوم با روش ترکیبی روی مدل‌های مصنوعی مقایسه می‌شود. نتایج اعمال روش‌ها روی مدل‌های سرعت حاوی لبه و بخش هموار، حاکی از رفع کاستی‌های دو روش مرسوم توسط روش ترکیبی است. علاوه بر آن سه روش فوق در وارون زمان رسید امواج ثبت شده در پروفیل لرزه‌ای قائم (VSP) واقعی نیز اعمال و نتایج به دست آمده با هم مقایسه و مورد بحث قرار می‌گیرد.

وارون زمان رسید
حل مسائل وارون
منظم‌ساز تیخنوف
منظم‌ساز تغییرات کلی
پروفیل لرزه‌ای قائم
پارامتر منظم‌سازی

تخمین مدل سرعت از مراحل بسیار مهم در پردازش و تفسیر داده‌های لرزه‌ای است. ارائه مدل سرعت دقیق باعث کاهش ریسک اکتشاف و حفاری در میادین جدید می‌شود. این موضوع در مناطقی که از لحاظ چینه‌شناسی و ساختمانی با پیچیدگی همراه هستند بسیار حیاتی‌تر بوده و ساخت مدل سرعت را بسیار مشکل‌تر می‌نماید. یکی از روش‌های تعیین مدل سرعت استفاده از داده‌های لرزه‌ای شکست مرزی است. اصول این روش بر پایه شکست امواج لرزه‌ای در مرز لایه‌های زمین است. در این روش برای تعیین مدل سرعت لایه‌های زمین از زمان رسید سربوها استفاده می‌شود و به روش‌های مختلفی منحنی زمان-مسافت حاصل تفسیر می‌شود (میلر و همکاران، ۱۹۹۸؛ آکرمن و همکاران، ۱۹۸۶؛ گولت و برابهام، ۱۹۸۴). دومین دسته از روش‌های تعیین مدل سرعت استفاده از داده‌های لرزه‌ای درون چاهی است. در این روش‌ها زمان سیر امواج از چشمه در سطح به گیرنده‌ها در داخل چاه (و بالعکس) اندازه‌گیری شده و سرعت متوسط و بازه‌ای امواج لرزه‌ای محاسبه می‌گردد (وتارس، ۱۹۸۱؛ میلسون و یریکسن، ۲۰۱۱). گروه سوم از روش‌های تعیین مدل سرعت استفاده از داده‌های لرزه‌ای بازتابی است. اصول این روش بر پایه بازتاب امواج لرزه‌ای در مرز لایه‌های زمین است. برای مدل سرعت لایه‌های زمین در این روش از شیوه‌های متعددی استفاده می‌شود (ایلماز، ۱۹۸۷؛ شریف و لود، ۲۰۰۴). استفاده از روش‌های وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای، چهارمین گروه از روش‌های تعیین مدل سرعت امواج لرزه‌ای است (ترانتول، ۲۰۰۵؛ لوریس و همکاران، ۲۰۰۷؛ غلامی و سیاه‌کوهی، ۲۰۱۰؛ قاسمی و غلامی، ۲۰۱۳).

از آنجا که در این مطالعه از روش وارون برای تعیین مدل سرعت استفاده شده است، این گروه از روش‌ها به طور مشروح در ادامه بیان می‌شود.

منظم‌ساز تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات کلی از جمله روش‌های مرسوم برای تخمین مدل سرعت از وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای هستند. روش اول توانمند در بازسازی سیگنال‌های هموار بوده ولی ناپیوستگی‌ها و لبه‌های سیگنال را به خوبی بازیافت نمی‌کند. در مقابل روش دوم به خوبی قادر به بازسازی لبه‌های سیگنال بوده ولی بخش‌های هموار را دچار اعوجاج می‌کند.

در این مقاله برای رفع کاستی‌های روش‌های مرسوم منظم‌سازی روشی از ترکیب روش‌های حل تیخنوف درجه دوم و تغییرات کلی ارائه می‌شود. به منظور ارزیابی توانمندی روش پیشنهادی برای تخمین مدل سرعت از زمان رسید امواج لرزه‌ای، این روش به همراه دو روش مرسوم دیگر (تیخنوف درجه دوم و تغییرات کلی) روی زمان رسیده‌های پروفیل لرزه‌ای قائم مصنوعی اعمال و نتایج مقایسه می‌شود. علاوه بر آن، سه روش فوق در وارون زمان رسید امواج ثبت شده در پروفیل لرزه‌ای قائم واقعی نیز اعمال و نتایج

۲- تعیین سرعت با استفاده از وارون‌سازی زمان

سیر امواج لرزه‌ای

در لرزه‌نگاری سطحی، لرزه‌نگاری قائم (VSP) و برش‌نگاری لرزه‌ای (seismic tomography) یکی از اهداف مطالعه می‌تواند تهیه مدلی مناسب از توزیع سرعت زیر سطحی با استفاده از زمان سیر امواج لرزه‌ای باشد. چون در دو روش لرزه‌نگاری قائم و برش‌نگاری لرزه‌ای نسبت به روش‌های لرزه‌نگاری سطحی امکان چیدمان متنوع چشمه و گیرنده وجود دارد (چرونی، ۲۰۰۱؛ بریمن، ۱۹۹۱؛ هادمن و هارس، ۱۹۹۶)، بنابراین داده‌های مربوطه برای بررسی‌های دقیق و جزئی‌تر ساختار سرعتی مناسب‌تر است. معمولاً نتایج این دو روش به منظور تکمیل اطلاعات داده‌های لرزه‌نگاری سطحی جهت تفسیر مناطق پیچیده از نظر زمین‌شناسی مورد استفاده قرار می‌گیرند (نالت، ۱۹۸۷؛ بارترون، ۲۰۰۷).

ارتباط بین زمان سیر اولین رسیده‌ها با سرعت در مسیر انتشار موج یک ارتباط غیرخطی است؛ زیرا مسیری که موج در محیط طی می‌کند به سرعت محیط بستگی دارد. فرض کنید $t_1, t_2, \dots, t_N$ یک مجموعه از زمان سیرهای مشاهده شده برای N زوج چشمه-گیرنده در یک محیط با کندی تعریف شده توسط $s(x)$ باشد. اگر P_i مسیر موج برای i امین زوج چشمه و گیرنده باشد با صرف‌نظر کردن از خطای مشاهده‌ای می‌توان نوشت:

$$t_i = \int_{P_i} s(x) dx \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

برای یک مدل زمین بلوک‌بندی شده (بریمن، ۲۰۰۰)، اگر l_{ij} طول مسیر پرتو i ام در سلول j ام باشد. رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$t_i = \sum_{j=1}^M l_{ij} s_j \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M \quad (2)$$

باید توجه نمود که برای هر پرتو i ، طول مسیر پرتوی l_{ij} برای اغلب سلول‌های j صفر است؛ زیرا هر پرتو برای رفتن از چشمه به گیرنده فقط از تعدادی از سلول‌ها عبور می‌کند.

با تعریف بردارهای ستونی s و t و ماتریس G رابطه (۲) می‌توان به صورت ماتریس زیر بازنویسی کرد.

بنابراین رابطه (۳) به صورت یک رابطه کلی برای مسئله مستقیم در تجزیه و تحلیل هر پرتو ظاهر می‌شود.

رابطه (۴) را می‌توان برای هر مجموعه از مسیر پرتوها بکار برد، چه این مسیرها رابطه (۱) را کمینه کند یا نکند؛ اما اگر مسیرهای مورد استفاده برای تشکیل G واقعاً همین مسیرهایی باشند که رابطه (۱) را کمینه نمایند باید در نظر داشت که G دقیقاً تابعی از s است (بریمن، ۲۰۰۰).

مسئله وارون زمانی بد وضع خواهد بود که یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد؛ یعنی یا جوابی برای آن وجود نداشته باشد، یا جواب یکتا نبوده و یا تابعی پیوسته از داده‌ها نباشد. هادامارد اعتقاد داشت که مسائل بد وضع «غیر واقعی» هستند و نمی‌توانند سیستم‌های فیزیکی را تشریح کنند. ولی امروزه مسائل بد وضع به شکل مسائل وارون در بسیاری از زمینه‌های علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند.

۳-۱- منظم‌سازی

در اواسط قرن بیستم ریاضیدان روسی، آندری تیخنوف، اصول تئوری حل مسائل بد وضع را توسعه داد و توانست یک روش منظم‌سازی را برای حل مسائل وارون که بر پایه تقریب مسئله بد وضع بود، ارائه دهد. ایده منظم‌سازی به این صورت است که از میان جواب‌های ممکن گروه خاصی از جواب‌ها انتخاب شوند، به طوری که این جواب‌ها (در حوزه یا پایه‌ای مشخص) دارای ویژگی خاصی باشند. این ویژگی خاص به عنوان اطلاعات پیشین^۱ شناخته می‌شود. پس برای حل این نوع مسائل، کافی است اطلاعات پیشین در مورد مدل داشته باشیم. اعمال اطلاعات پیشین بر روی مدل به کاهش تعداد جواب‌ها کمک می‌کند به طوری که جواب به دست آمده دارای ویژگی خاص مورد نظر خواهد بود. در این حالت تابع هزینه به شکل زیر درمی‌آید:

$$J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \varphi(L_i, x) \quad (۸)$$

در رابطه بالا L_i پایه یا حوزه مطلوب، λ به عنوان ضریب لاگرانژ یا پارامتر منظم‌سازی و همچنین $\varphi(x)$ با عنوان تابع پتانسیل شناخته می‌شود. وظیفه پارامتر منظم‌سازی تعیین اندازه منظم‌سازی است. هرگاه برابر صفر قرار داده شود، هیچ منظم‌سازی بر مسئله اعمال نمی‌شود. مسئله‌ی بهینه‌سازی به مسئله کمترین مربعات تبدیل می‌شود. هر چه این مقدار افزایش یابد نقش اطلاعات اولیه در جواب بیشتر شده و طبیعتاً نوبه بیشتری برای داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. به طور کلی منظم‌سازی را می‌توان به دو گروه منظم‌سازی درجه دو و غیر درجه دو دسته‌بندی کرد.

الف) منظم‌سازی درجه دوم (تیخنوف)

بر طبق تئوری احتمالاتی بیز (تردو سیلیکی، ۲۰۱۲) با فرض توزیع گوسی برای مدل و استفاده از روش بیشینه‌سازی انتظار، می‌توان نوشت (غلامی، ۱۳۸۷):

$$\varphi(x) = \|x\|_2^2 \quad (۹)$$

از آنجا که تابع پتانسیل (φ) درجه دوم است، به این نوع منظم‌سازی، منظم‌سازی درجه دوم می‌گویند. در این صورت مدل به دست آمده از تابع هزینه $J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|m\|_2^2$ دارای توزیع گوسی است. از نظر فیزیکی این جواب نه تنها با خطای مشخصی داده‌ها را برازش می‌کند، بلکه انرژی آن محدود است (تردو، ۲۰۰۳). در این حالت ضرایب مدل در اطراف صفر تجمع می‌یابند. در مواردی نیاز است که مدل نزدیک به یک مدل مرجع تخمین زده شود. در

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_M \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}, \quad (۳)$$

$$G = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1M} \\ I_{12} & I_{22} & \cdots & I_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1} & I_{N2} & \cdots & I_{NM} \end{pmatrix}$$

$$t = Gm \quad (۴)$$

۳- مشکلات حل مسائل وارون

مسائل وارون به سه دسته مسائل فرامعین و فرومعین و معین تقسیم می‌شوند (منکه، ۱۹۸۴). در مسائل فرامعین، در رابطه‌ی $d = Gm + e$ اطلاعات بیشتری از آنچه برای تعیین جواب مورد نیاز است، وجود دارد. مسائل فرومعین با روش کمترین مربعات قابل حل می‌باشند. روش کمترین مربعات بر اساس کمینه کردن نرم-۲ اختلاف بین داده‌های اندازه‌گیری شده و داده‌های پیش‌بینی شده است.

$$J = (\|d - d_p\|_2^2) \quad (۵)$$

بعد از مشتق‌گیری از تابع هدف J و ساده‌سازی دارند:

$$\hat{m} = (G^T G)^{-1} G^T d \quad (۶)$$

که در آن $\hat{m}$ بیانگر مدل تخمینی است. این مقدار به عنوان جواب کمترین مربعات یا جواب مور-پنرز در مسائل فرامعین شناخته می‌شود. در مسائل فرومعین در رابطه $d = Gm + e$ ، اطلاعات کافی که برای تعیین دقیق جواب مورد نیاز است، وجود ندارد و نیاز به اطلاعات دیگری برای حل مسئله است. در صورت حل مسائل فرومعین با روش کمترین مربعات و قید کمینه بودن انرژی مدل، به جواب زیر می‌رسند (منکه، ۱۹۸۴):

$$\hat{m} = G^T (G^T G)^{-1} d \quad (۷)$$

در مسائل معین و در غیاب نوبه، اطلاعات موجود در داده‌ها برای تعیین مدلی یکتا می‌تواند کافی باشد. ولی در واقعیت چنین حالتی نادر بوده و غالباً داده‌ها حاوی نوبه هستند و این امر موجب می‌شود که مسئله جواب یکتا نداشته باشد. مفهوم خوش‌وضع و بدوضع یک مسئله وارون به زمان هادامارد، ریاضیدان معروف فرانسوی در ابتدای قرن بیستم، بازمی‌گردد. بر اساس نظریه هادامارد، یک مسئله عددی ریاضی زمانی خوش‌رفتار است؛ هرگاه جواب آن موجود، یکتا و پایدار باشد. همچنین بر اساس نظریه هادامارد یک

^۱ - Apriori

داده شده در (غلامی، ۱۳۸۷)، تابع پتانسیل زیر را به دست می‌آورند:

$$\varphi(x) = \sum_i |x_i|^p = \|x\|_p^p \quad (15)$$

برای بازیابی تنک داریم، $0 \leq p \leq 1$.

در صورت انتخاب توزیع‌های احتمالاتی دنباله سنگین دیگر، به

تابع‌های پتانسیل ذکر شده در جدول ۱ می‌توان رسید.

غلامی و حسینی (۲۰۱۱) تابع پتانسیل کلی معرفی کرده‌اند

که طیف وسیعی از توابع تنک کننده را در برمی‌گیرد و توابع معرفی

شده در جدول ۱، حالت‌های خاصی از این تابع معرفی شده

می‌باشند. در بازیابی تنک تابع $\varphi(x)$ درست است که این نوع

منظم‌سازی برای ما مدلی با قدرت تفکیک بسیار بالا تولید می‌کند،

اما غیرخطی بوده، بدین معنا که به جز در مورد تضعیف نوفه،

نمی‌توان رابطه‌ای به فرم بسته برای حل آن نوشت. این گونه مسائل

در بیشتر موارد به روش تکرار حل می‌شوند. همچنین در مواردی

توابع هزینه مشتق شده از این توابع پتانسیل محدب نبوده و لذا برای

دستیابی به کمینه سراسری آن، می‌بایست از روش‌های بهینه‌سازی

سراسری استفاده شود که از نظر محاسباتی، بسیار پرهزینه می‌باشند.

این موارد حل این نوع مسائل معکوس را مشکل می‌کند.

جدول ۱: تابع‌های پتانسیل مرتبط با چند توزیع احتمالاتی دنباله

سنگین (غلامی، ۱۳۸۷).

توزیع احتمالاتی	تابع پتانسیل $\varphi(x)$
گوسی تعمیم‌یافته	$ x ^p$
کوشی	$\ln(1+x^2)$
لاپلاسی	$ x $

منظم‌ساز تغییرات کلی (Total Variation, TV) منظم‌سازی

از حالت غیر درجه دوم است. تابع مطلوب در حل مسائلی است که

دارای ناپیوستگی‌ها و پرش‌هایی در مدل باشند (معروف به مدل

تکه‌ای ثابت یا مدل بلوکی). در مسائل یک بعدی منظم‌ساز TV به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$TV(m) = \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1} - m_i| = \|L_1 m\|_1 \quad (16)$$

که در آن L_1 عملگر مشتق‌گیری مرتبه یک است. رابطه (۱۶).

می‌توان منظم‌ساز TV را به جای عبارت $\|L_1 m\|_2^2$ در رابطه تیخنوف

(۱۱) قرار داد تا به رابطه زیر برسند:

$$J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|L_1 m\|_1 \quad (17)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۷) و برابر صفر قرار دادن آن به

رابطه زیر می‌رسیم که به عنوان منظم‌ساز تغییرات کلی شناخته

می‌شود.

$$(G^T G + \frac{\lambda}{2} L_1^T g^{k+1} L_1) m^{k+1} = G^T d \quad (18)$$

این حالت می‌توان بدین صورت به مسئله نگاه کرد که باید اختلاف

انرژی بین مدل تخمینی و یک مدل مرجع کمینه شود. در این

صورت تابع هزینه بدین صورت درمی‌آید:

$$J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|(m - m_0)\|_2^2 \quad (10)$$

و یا در مواردی می‌خواهیم مدل تخمینی یک مدل هموار باشد؛

به عبارت دیگر گرادیان سیگنال دارای انرژی محدودی باشد. با اعمال

این قید به تابع هزینه زیر به دست می‌آید:

$$J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|L_i m\|_2^2 \quad (11)$$

که در آن L_i می‌تواند عملگر مشتق‌گیری مرتبه یک L_1 یا

مرتبه دوم L_2 باشد.

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(M-1) \times M} \quad (12)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{(M-2) \times M} \quad (13)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۱) و برابر صفر قرار دادن آن رابطه

(۱۴) به دست می‌آید؛ که به عنوان حل مسئله وارون با منظم‌سازی

تیخنوف شناخته می‌شود.

$$\hat{m} = (G^T G + \lambda L_i^T L_i)^{-1} G^T d \quad (14)$$

نکته قابل توجه در این نوع منظم‌سازی علاوه بر محدب بودن

تابع هزینه، خطی بودن آن است. بدین معنا که با یک مرحله

محاسبات می‌توان به کمینه کننده سراسری تابع هزینه دست پیدا

کرد.

ب) منظم‌سازی غیر درجه دوم

اعمال قید بر مدل در مواردی باعث می‌شود که با منظم‌سازی غیر

درجه دوم مواجه شویم. این نوع منظم‌سازی کاربردهای زیادی دارد.

به عنوان مثال در حل مسئله وارون انتظار داریم مدل (در یک حوزه

خاص) تنک باشد. منظور از مدل تنک یعنی مدلی که عناصر غیر

صفر آن در مقایسه با طول مدل خیلی اندک باشد. این فرض در

بیشتر موارد با مدل‌های واقعی (مانند سری بازتاب زمین) همخوانی

بیشتری داشته و موجب می‌شود مدل تخمین زده شده دارای قدرت

تفکیک بالایی باشد.

برای اعمال قید تنکی بر روی مدل از دیدگاه تئوری بیز و

بیشینه‌سازی انتظار، کافی است توزیع احتمالاتی دنباله سنگین را

برای مدل در نظر بگیریم. مثال چنین توزیع‌هایی، توزیع گوسی

تعمیم‌یافته، لاپلاسی، کوشی و گوسی-برنولی است. در صورت

انتخاب توزیع گوسی تعمیم‌یافته و دنبال کردن روند محاسباتی شرح

$$\arg \min_{x_1, x_2} \left\langle \left\| y - G(x_1 + x_2) \right\|_2^2 + \mu (\left\| L_2 x_2 \right\|_2^2 + \xi \left\| L_1 x_1 \right\|_1) \right\rangle \quad (22)$$

که در آن μ ، ξ پارامترهای منظم‌سازی، L_1 عملگر مشتق‌گیری مرتبه یک، L_2 عملگر مشتق‌گیری مرتبه دوم است. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۲) نسبت به x_1 و x_2 و مساوی صفر قرار دادن آن داریم:

$$\begin{cases} (G^T G + \frac{\mu \xi}{2} L_1^T \mathcal{G}(x_1) L_1) x_1 + G^T G x_2 = G^T y \\ G^T G x_1 + (G^T G + \mu L_2^T L_2) x_2 = G^T y \end{cases} \quad (23)$$

که در آن

$$\mathcal{G}(x_1) = \text{diag}_{i=1 \dots M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{[L_1 x_1]_i^2 + \varepsilon}} \right) \quad (24)$$

با استفاده از روش‌های عددی مثل (IRLS) معادله (۲۳) را حل می‌کنیم. برای حل بروش IRLS ماتریس‌های H ، u و b به صورت زیر تولید می‌شوند:

$$H(x_1) u(x_1, x_2) = b \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} (G^T G + \frac{\mu \xi}{2} L_1^T \mathcal{G}(x_1) L_1) & G^T G \\ G^T G & (G^T G + \mu L_2^T L_2) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$= H(x_1) \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = u(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2M} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} G^T y \\ G^T y \end{bmatrix} = b \in \mathbb{R}^{2M} \quad (28)$$

همان‌گونه که ذکر شد انتظار می‌رود که مدل تخمین زده شده با کمینه کردن تابع هدف در رابطه (۲۲) به وسیله فرمول‌بندی ۲۳ تا ۲۸ بتواند مدل‌های تکه‌ای ثابت و هموار را به دست آورد.

معیار توقف فرآیند وارون‌سازی داده‌ها در روش منظم‌سازی ترکیبی به صورت زیر است:

$$\left\| u^{k+1} - u^k \right\| < Tol \quad (29)$$

که در آن Tol مقداری کوچک و مثبت است.

که در آن λ پارامتر منظم‌ساز است و

$$\mathcal{G}^{k+1} = \text{diag}_{i=1 \dots M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{[L_1 m^k]_i^2 + \varepsilon}} \right) \quad (19)$$

که در آن $\mathcal{G}$ ماتریس قطری و ε مقداری کوچک است. برای حل معادله (۱۸) از روش تکراری IRLS استفاده می‌شود و معیار انتخاب شده برای توقف فرآیند وارون‌سازی طبق رابطه زیر است:

$$\left\| m^{k+1} - m^k \right\| < Tol \quad (20)$$

که در آن Tol مقداری کوچک و مثبت است.

در منظم‌ساز تیخنوف مرتبه اول و دوم، ناپیوستگی‌ها در مدل هموار گشته و در پاسخ خروجی به خوبی نمایش داده نمی‌شوند. این رخداد به علت این است که در این گونه مسائل قسمت‌های هموار کمتر تحت تأثیر قسمت منظم‌ساز قرار می‌گیرند تا قسمت‌های زاویه‌دار. ویژگی عمومی منظم‌ساز TV این است که در آن قسمت منظم‌ساز هر دو قسمت‌های هموار و ناپیوستگی‌ها را یکسان تحت تأثیر قرار می‌دهد. در این مطالعه از ترکیب امتیازات دو منظم‌ساز فوق بهره خواهیم برد و مدل سرعت امواج لرزه‌ای را از وارون زمان رسید داده‌های لرزه‌نگاری قائم با دورافت صفر (مصنوعی و واقعی) به دست خواهیم آورد.

۴- ترکیب منظم‌ساز تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات

کلی

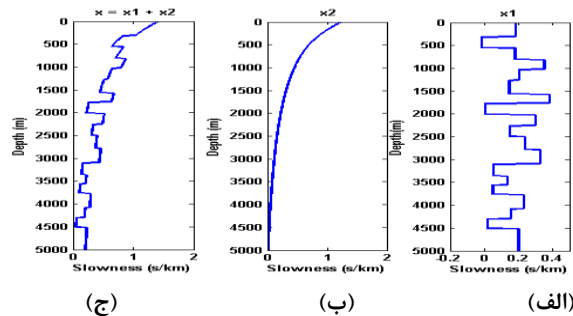
در این روش منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم و تابع منظم‌ساز تغییرات کلی با هم ترکیب می‌شوند تا نقاط ضعف ناشی از منظم‌سازی تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات کلی برطرف شود.

فرض کنید مدل سرعت مورد بررسی ترکیبی از مدل تکه‌ای ثابت x_1 و مدل هموار x_2 باشد (غلامی و حسینی، ۲۰۱۳)، (شکل ۱):

$$x = x_1 + x_2 \quad (21)$$

در حل مسئله وارون برای مدل‌سازی x_1 نیازمند تابع منظم‌ساز تغییرات کلی هست و برای مدل‌سازی x_2 منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم لازم است.

برای حل مسئله وارون بالا با منظم‌ساز ترکیبی، کمینه کردن تابع هدف زیر لازم است:



شکل ۱: الف) مدل کندی تکه‌ای ثابت، ب) مدل کندی هموار، ج) مدل کندی مورد بررسی (ترکیبی از مجموع دو مدل کندی).

ابتدا برای انجام وارون به صورت جداگانه با روش‌های منظم‌ساز تیخنوف و منظم‌ساز تغییرات کلی باید پارامتر منظم‌سازی را برای آن‌ها با استفاده از منحنی L دست آوریم، برای این منظور از اطلاعات روش تیخنوف استفاده شد. در ادامه برای تعیین پارامتر منظم‌سازی برای روش ترکیبی منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم و منظم‌ساز تغییرات کلی نیز از منحنی L استفاده کردیم که جزئیات روش بکار رفته در غلامی و حسینی (۲۰۱۳) آورده شده است. نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است.

مقدار پارامتر منظم‌سازی برای روش ترکیبی با ترتیب

$$\mu = 30 \times 10^{-7} \text{ و } \xi = 30 / 11 \times 10^{-9} \text{ می‌باشند.}$$

وقتی که روش منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم روی زمان رسیده‌ها در (شکل ۲-ب) اعمال شد، نتایج آن به صورت هموار شده با مقدار خطای $MSE = 0.0014235$ به دست آمد. مدل به دست آمده در محل لبه‌ها به همراه جهش‌های مات کننده (blurring jumps) ظاهر شده و می‌توان گفت که یک جواب بیش هموار (over-smoothing) است، شکل (۴-الف)؛ اما وقتی تابع منظم‌ساز تغییرات کلی روی زمان رسیده‌ها اعمال شد، مدل با مقدار خطای $MSE = 0.0063335$ به دست آمد که در بخش‌های هموار، مدل به صورت پله‌ها یا جهش‌هایی مشاهده شد. نتیجه به دست آمده به عنوان یک مدل کم هموار (under-smoothing) است، شکل (۴-ب).

۵- بررسی عملکرد سه روش منظم‌سازی فوق برای

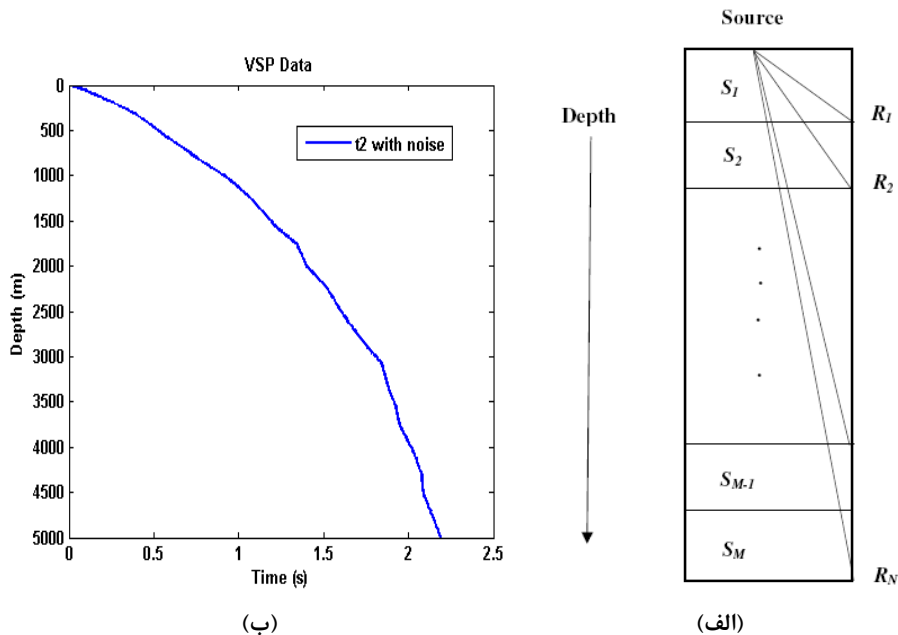
وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای در VSP

۵-۱- داده‌های VSP مصنوعی

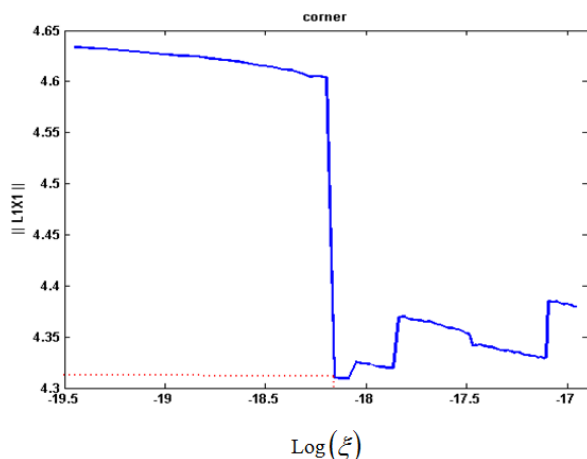
روش منظم‌ساز ترکیبی پیشنهادی روی یک مسئله توموگرافی یک بعدی با استفاده از داده‌های پروفیل لرزه‌ای قائم اعمال و نتیجه با نتایج حاصل از هرکدام از دو روش منظم‌ساز مرسوم مقایسه گردید. چیدمان چشمه-گیرنده بکار رفته برای آزمایش مصنوعی پروفیل لرزه‌ای قائم با دورافت صفر در شکل (۲-الف) نشان داده شده است. چشمه موج لرزه‌ای در روی سطح زمین و در مجاورت دهانه چاهی که تعدادی گیرنده در آن تعبیه شده، قرار داده شده است. زمان‌های رسید موج لرزه‌ای که توسط چشمه تولید شده است به N گیرنده داخل چاه، بردار داده‌های d را تشکیل می‌دهد و بردار پارامترهای m شامل M لایه با ضخامت‌های یکسان است و فرض بر این است که کندی در هر لایه ثابت باشد. زمان سیر t در طول یک پرتو با انتگرال کندی محلی $s(z)$ در طول پرتو محاسبه می‌شود:

$$t_i = \int_{p_i} s(z) dz = \int \frac{1}{v(z)} dz \quad i = 1, \dots, N \quad (30)$$

که در آن $v(z)$ تابع سرعت در راستای قائم است. داده‌های مصنوعی از یک مدل با ۵۷۶ لایه با کندی‌های ثابت تولید شدند شکل (۱-ج)، سپس زمان رسیده‌های به دست آمده با یک نوفه تصادفی با توزیع نرمال و انحراف معیار $\sigma = 0.495$ ترکیب شدند که در شکل (۲-ب) نشان داده شده است.



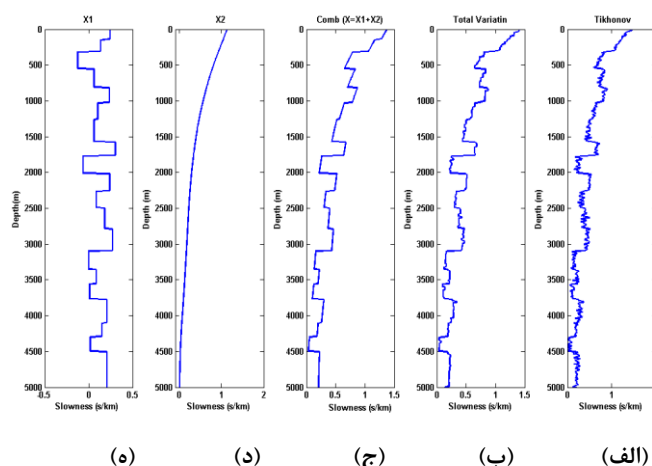
شکل ۲: الف) چیدمان چشمه-گیرنده برای آزمایش مصنوعی پروفیل لرزه‌ای قائم با دورافت صفر. چشمه در دورافت صفر قرار دارد اما برای مشاهده بهتر با کمی دورافت از دهانه چاه نشان داده شده است، S_i نشان‌دهنده کندی بازه‌ای لایه i ام و R_i نشان‌دهنده گیرنده i ام است، ب) زمان رسید امواج لرزه‌ای حاصل از مدل کندی با نوفه گاوسی.



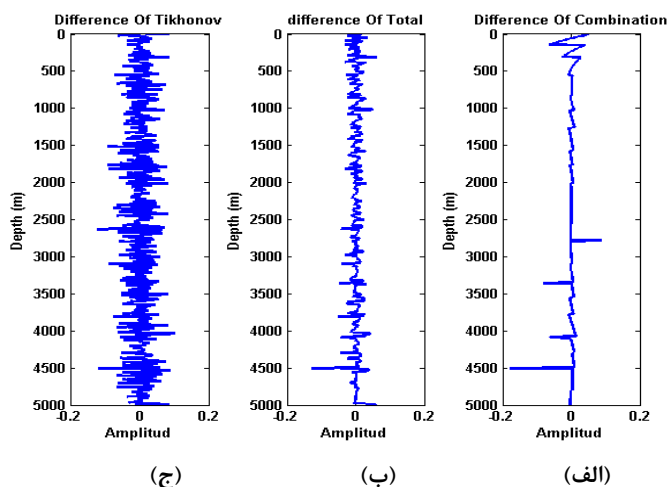
شکل ۳: منحنی L برای تعیین پارامتر منظم‌سازی ترکیبی تیخنوف درجه دوم و تغییرات کلی.

ولی وقتی روش منظم‌سازی ترکیبی روی زمان رسیده‌ها اعمال شد، مدل تخمین زده شده برای هر بخش از مدل ورودی (بخش تکه‌ای ثابت x_1 و بخش هموار x_2) و ترکیب آن دو (x) در شکل (۴-ج و ۴-د و ۴-ه) نشان داده شده است. مقدار خطای تخمین با روش ترکیبی $MSE=0.00054163$ است. نتایج حاصل از اختلاف مدل کندی اصلی با مدل کندی به دست آمده از اعمال سه روش منظم‌سازی در شکل ۵ نشان داده شده است.

با توجه به مدل به دست آمده از منظم‌سازی مرکب، مشاهده می‌شود که نه تنها نقاط ضعف مدل حاصل از روش منظم‌سازی تیخنوف درجه دوم و مدل حاصل از روش تابع منظم‌سازی تغییرات کلی برطرف شده است بلکه خطای آن نیز کمتر است. جدول ۲ زمان محاسبات، تعداد تکرارها و مقدار پارامتر Tol را برای سه روش منظم‌سازی بکار رفته نشان می‌دهد.



شکل ۴: نتایج به‌کارگیری سه روش منظم‌سازی در وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای (شکل ۲-ب) مربوط به مدل کندی (۱-ج، الف) مدل کندی حاصل از اعمال روش منظم‌سازی تیخنوف درجه دوم، (ب) مدل کندی حاصل از اعمال روش منظم‌سازی تغییرات کلی، (ج) ترکیب دو مؤلفه (د) و (ه) به عنوان مدل کندی نهایی x حاصل از اعمال روش پیشنهادی، (د) مؤلفه هموار x_2 ، (ه) مؤلفه تکه‌ای ثابت x_1 .



شکل ۵: اختلاف مدل کندی اصلی با مدل کندی حاصل از اعمال سه روش منظم‌سازی، الف) اختلاف مدل کندی اصلی و مدل کندی حاصل از روش ترکیبی، (ب) اختلاف مدل کندی اصلی و مدل کندی حاصل از روش منظم‌سازی تغییرات کلی، (ج) اختلاف مدل کندی اصلی و مدل کندی حاصل از روش منظم‌سازی تیخنوف درجه دوم.

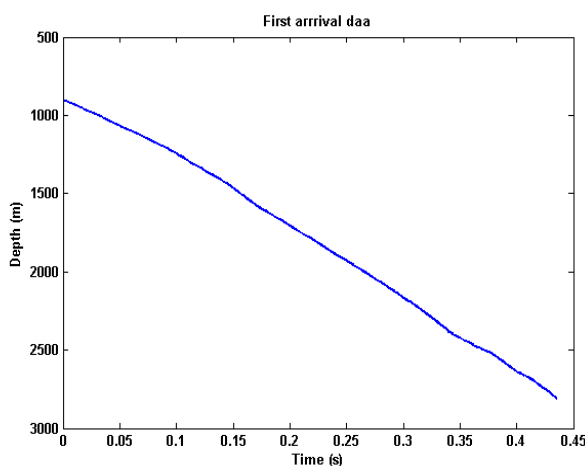
الرجاوی و همکاران، وارون زمان رسید امواج لرزه‌ای برای تخمین مدل سرعت به کمک ترکیب منظم‌سازهای تیخنوف و تغییرات کلی، صفحات ۱۳-۱. جدول ۲: مقایسه عملکرد سه روش منظم‌سازی از نظر زمان محاسبات، تعداد تکرارها و مقدار پارامتر Tol.

مقایسه	منظم‌ساز تیخنوف	منظم‌ساز تغییرات کلی	منظم‌ساز ترکیبی
تکرار	-	۱۶	۲۷
زمان (s)	۰,۰۴۶۸	۱,۹۹۶	۴,۶۸۳
Tol	-	۰,۰۰۲۷۴	۰,۰۰۰۰۲۵

۵-۲- اعمال روش‌های روی داده‌های واقعی

داده بکار رفته در این مثال مربوط به یک عملیات پروفیل لرزه‌ای قائم با دروافت صفر است (غلامی و سیاه‌کوهی، ۲۰۱۰؛ قاسمی و غلامی، ۲۰۱۳) که توسط شرکت شلومبرگر در یک چاه اکتشافی قائم به عمق ۳۱۰۰ متر در جنوب ایران انجام گرفته است. چشمه لرزه‌ای مورد استفاده دو تفنگ سودرا جی (Sodera G) با ظرفیت تقریبی ۲۵۰ cu. in. بوده است. یک آشکارساز لرزه‌ای با چهار قسمت مجرا به فواصل ۱۵/۱۲ متر به عنوان گیرنده پایین چاهی سه مؤلفه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. امواج لرزه‌ای از بالا تا پایین چاه جمعاً در ۲۰۳ نقطه با فواصل تقریبی ۱۵ متر داده ثبت شده است. زمان رسیدهای قرائت شده برای این عملیات در شکل ۶ نشان داده شده است. همچنین برای چاه مذکور از عمق ۹۰۰ متر تا ۲۸۰۰ متر نگاره صوتی موجود بود که در شکل (۷-الف) نشان داده شده. از این نگاره برای مقایسه نتایج روش وارون پیشنهادی استفاده می‌شود. روش منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم روی زمان رسید داده‌های واقعی اعمال شد، نتایج آن به صورت هموار شده به دست آمد که در شکل (۷-ج) نشان داده شده است. سپس تابع منظم‌ساز تغییرات کلی

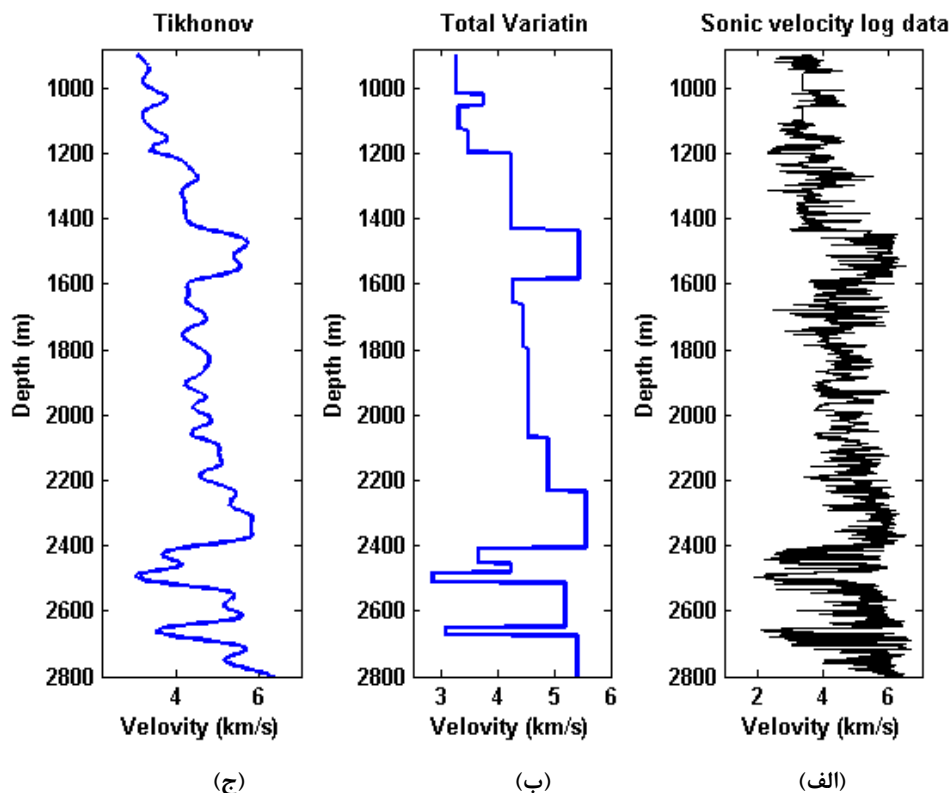
روی زمان رسید داده‌های واقعی اعمال شد که در شکل (۷-ب) مشاهده می‌شود. در بخش‌های هموار مدل به دست آمده به صورت پله یا جهش (jump) ظاهر شده است. مدل سرعتی به دست آمده از اعمال روش منظم‌ساز ترکیبی روی داده‌های واقعی نیز در شکل (۸-الف) نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل پیداست، مدل سرعتی به دست آمده محل لبه‌ها و بخش‌های هموار را بهتر ظاهر کرده و جزئیات بیشتری را نسبت به نتایج دو روش مرسوم نشان می‌دهد. همچنین مقایسه مدل سرعتی به دست آمده با لاگ صوتی برداشت شده در چاه مورد مطالعه، حاکی از تطابق خوب و حفظ ناپیوستگی‌ها است (شکل ۸-ب). همان‌طور که انتظار می‌رفت به خاطر تکراری بودن روش تغییرات کلی، زمان اجرای آن نسبت به روش تیخنوف بیشتر است. همچنین به خاطر زیاد بودن حجم محاسبات در روش پیشنهادی و تکراری بودن آن، زمان اجرا برای این روش بیشتر از هر دو روش مرسوم به دست آمده است. مقادیر مربوطه در جدول ۳ نشان داده شده است.



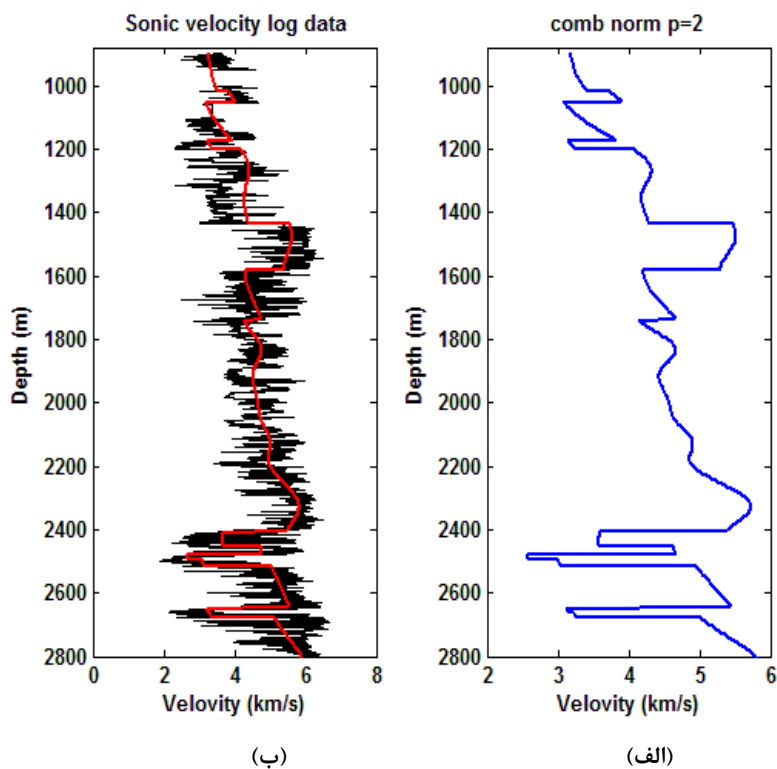
شکل ۶: زمان رسید امواج لرزه‌ای مربوط به داده‌های عملیات پروفیل لرزه‌ای قائم در یک چاه اکتشافی به عمق ۳۱۰۰ متر در جنوب ایران.

جدول ۳: مقایسه عملکرد سه روش منظم‌سازی از نظر زمان محاسبات، تعداد تکرارها و مقدار پارامتر Tol (داده‌های واقعی).

مقایسه	منظم‌ساز تیخنوف	منظم‌ساز تغییرات کلی	منظم‌ساز ترکیبی
تکرار	-	۳۱	۵۴
زمان (s)	۰,۰۲۹۷	۲,۱۴۵	۶,۲
Tol	-	۰,۰۰۰۰۱۴	۰,۰۰۰۰۱۵



شکل ۷: الف) نگار صوتی چاه مورد مطالعه از عمق ۹۰۰ تا ۲۸۰۰ متر، ب) مدل سرعت به دست آمده از اعمال روش تغییرات کلی در محدوده عمقی قسمت الف، ج) مدل سرعت به دست آمده از اعمال روش تیخنوف درجه دوم در محدوده عمقی قسمت الف.



شکل ۸: الف) مدل سرعت به دست آمده از اعمال روش منظم‌ساز ترکیبی در محدوده عمقی مورد مطالعه، ب) رسم هم‌زمان نگار صوتی چاه مورد مطالعه از عمق ۹۰۰ تا ۲۸۰۰ متر (سیاه) و مدل سرعت نشان داده شده در الف) (قرمز).

۶- نتیجه‌گیری

یکی از انگیزه‌های به‌کارگیری روش منظم‌ساز ترکیبی در این مطالعه وجود ضعف منظم‌ساز تیخنوف در حفظ لبه‌ها و ناپیوستگی‌ها و ضعف منظم‌ساز تغییرات کلی در ناهموار کردن مدل‌های هموار بود. با مثال‌های مصنوعی و داده‌های واقعی این کاستی‌ها نشان داده شد که دال بر ضرورت به‌کارگیری روش منظم‌ساز ترکیبی است. در حضور نوفه گاوسی با استفاده از ترکیب منظم‌ساز درجه دوم و تابع منظم‌ساز تغییرات کلی این نقاط ضعف از روش منظم‌ساز تیخنوف درجه دوم و روش تابع منظم‌ساز تغییرات کلی برطرف می‌شود. روش ترکیب منظم‌ساز درجه دوم و تابع منظم‌ساز تغییرات کلی برای تخمین مدل سرعت با خطای کمتری جواب می‌دهد.

۷- منابع

- غلامی، ع.، ۱۳۸۷، منظم‌سازی مسائل بد وضع ژئوفیزیکی بر مبنای تنکی، رساله دکتری ژئوفیزیک، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.
- Ackermann, H.D., Pankratz, L.W. and Dansereau, D., 1986, Resolution of ambiguities of seismic refraction travel timecurves, *Geophysics*, 51, 223-235.
- Baker, D.W. and Carter, N.L., 1972, Seismic velocity anisotropy calculated for ultramafic minerals and aggregates, in H.C. Heard, I.V. Borg, N.L. Carter, and C.B. Raleigh, eds., *Flow and fracture of rocks*, American Geophysical Union Geophysical Monographs, 16, 157-166.
- Barton, N., 2007, Rock quality, seismic velocity, attenuation and anisotropy, Taylor and Francis.
- Berryman, J.G., 1991, Lecture notes on nonlinear traveltimes and tomography, Earth resources laboratory, Massachusetts Institute of Technology, University of California.
- Berryman, J. G., 2000, Analysis of approximate inverses in tomography: I. Resolution analysis of common inverses, *Optimization and Engineering*, vol. 1, 87-115.
- Bertalmio, M., Vese, L., Sapiro, G. and Osher, S., 2003, Simultaneous structure and texture image inpainting, *IEEE Transactions on Image Processing*, 12, 882-889.
- Cerven'y, V., 2001, Seismic ray theory, Cambridge University Press, Cambridge.
- Christensen-Dalsgaard, J., Schou, J. and Thompson, M., 1990, A comparison of methods for inverting helioseismic data, *Month. Not. R. Astr. Soc.*, 242, 353-369.
- Gheymasi, H. M. and Gholami, A., 2013, A local-order regularization for geophysical inverse problems, *Geophysical Journal International*, 195, 1288-1299.
- Gholami, A. and Hosseini, S.M., 2011, A general framework for sparsity-Based denoising and Inversion, *IEEE transaction on signal processing*, 59 (11), 5202-5211.
- Gholami, A. and Hosseini, S.M., 2013, A balanced combination of tikhonov and total variation regularizations for reconstruction of piecewise-smooth signals, *Signal Process*, 31, 54-59.
- Gholami, A. and Siahkoobi, H.R., 2010, Regularization of linear and non-linear geophysical ill-posed problems with joint sparsity constraints, *Geophysical Journal International*, 180, 871-882.
- Goulty, N. R. and Brabham, P. J., 1984, Seismic refraction profiling in opencast coal exploration, *First Break*, 2(5), 26-34.
- Hanse, P. and Leary, D.O., 1993, The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM Journal of Scientific Computing*, 14, 1487-1503.
- Hanse, P.C., 1999, Rank-deficient and Discrete Ill-posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion, Philadelphia, SIAM.
- Harrington, R.F., 1968, *Field Computations by Moment Methods*, Macmillan, New York.
- Hyndman, D.W. and Harris, J.M., 1996, Traveltime inversion for the geometry of aquifer lithologie, *Geophysics*, 61 (6), 1728-1737.
- Li, Y. and Oldenburg, D.W., 1999, 3-D inversion of DC resistivity data using an L-curve Criterion, SEG 69th Annual International Meeting, Houston, TX., 251-254.
- Loris, I., Nolet, G., Daubechies, I. and Dahlen, F.A., 2007, Tomographic inversion using l_1 -norm regularization of wavelet coefficients, *Geophys. J. Int.*, 170, 359-370.
- Menke, W., 1984, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*, Academic Press Inc.
- Miller, K.C., Harder, S.H., Adams, D.C. and O'Donnell, T., 1998, Integrating high-resolution refraction data into near-surface seismic reflection data processing and interpretation, *Geophysics*, 63, 1339-1347, doi: 10.1190/1.1444435.
- Milsom, J. and Eriksen, A., 2011, *Field Geophysics*, 4th edn, ISBN: 978-0-470-74984-5.
- Nolet, G., 1987, *Seismic tomography with application in global seismology and exploration geophysics*, D. Reidel Publishing Co.
- Nolet, G., 1987, *Seismic Tomography*, Kluwer, Dordrecht, the Netherlands.

- Tarantola, A., 2005, Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, SIAM, Philadelphia.
- Trad, D., 2003, Interpolation and multiple attenuation with migration operators, Geophysics, 68, 2043-2054. doi: 10.1190/1.1635058.
- Trad, D., Siliqi, R., Poole, G. and Boelle, J., 2012, Fast and robust deblending using apex shifted Radon transform, 82nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, doi: 10.1190/segam2012-0703.1.
- Van wijk, K., Scales, J.A., Navidi, W. and Tenori, L., 2002, Data and model uncertainty estimation for linear inversion, Geophys. J. Int., 149, 625-632.
- Waters. K.H., 1981, Reflection seismology, John Wiley and Sons, Inc.
- Yilmaz, O., 1987, Seismic Data Processing, Seismic data processing, Soc. of Expl. Geophysics, 526 P.
- Osaki, Y. and Shibahashi, H., 1990, Progress of Seismology of the Sun and Stars, Springer-Verlag, Berlin.
- Parker, R.L., 1977, Understanding inverse theory, Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 5, 35-64.
- Parker, R.L., 1994, Geophysical Inverse Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Pratt, G., 2002, Applied Geophysics, Queens University Press.
- Sen, M.K. and Roy, I.G., 2003, Computation of differential seismograms and iteration adaptive regularization in pre-stack seismic waveform inversion, Geophysics, 68, 2026-2039.
- Sheriff, R.E., and Lloyd, P.G., 2004, Problems in Exploration Seismology and their solutions. Tulsa, OK: Society of Exploration Geophysicists, doi:10.1190/1.9781560801733.



Seismic travel time inversion for velocity model estimation using combination of Tikhonov and total variation regularizations

Mohammad Alrajawi¹, Hamid Reza Siahkoobi^{2*} and Ali Gholami³

1- Ph.D. Candidate, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

2- Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

3- Associate Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran

Received: 7 May 2016; Accepted: 15 September 2016

Corresponding author: hamid@ut.ac.ir

Keywords

Traveltime Inversion

Inverse Problems

Tikhonov Regularization

TV Regularization

Vertical Seismic Profile (VSP)

Regularization Parameters

Extended Abstract

Summary

A variety of methods has been presented to invert arrival time of seismic waves for velocity distribution over the survey area. In real world, the velocity distribution model consists of blocky structures as well as smooth varying parts. In such cases, implementation of Tikhonov regularization will recover the smooth varying portion of the velocity model; while the Total Variation (TV) regularization is capable of recovering the blocky varying parts of the

velocity model. In this research, a technique for solving inverse problems based on a combination of second order Tikhonov and TV regularizations is proposed. The methods are tested on both synthetic and real arrival times and the results are presented.

Introduction

Inverse problems are applied in different disciplines. These methods in geophysical applications become a bit complicated due to special conditions of geophysical data. The conditions arise from the fact that geophysical data are collected only once due to the high acquisition cost; or it is due to the effects of discretization of the problem. In general, the issues that we encounter in geophysical inverse problems are classified as ill-posed inverse problems. Inverse problems are divided into three categories: Over-determined, Under-determined, and Even-determined. Over-determined systems often have no solutions; it is possible for an over-determined system of equations to have either many solutions or exactly one solution. For even-determined problems, it is possible to have a unique solution. A system of equations with fewer equations than variables is under-determined. In many cases under-determined systems of equations have infinitely many solutions. Under-determined systems need the regularization. In such cases regularization is required to choose a suitable model from those fitting the data. Two conventional regularization methods are Tikhonov regularization and TV regularization.

Methodology and Approaches

For a linear inverse problem $d = Gm + e$ where $d \in \mathbb{R}^m$ is data, $m \in \mathbb{R}^n$ is model parameters, $e \in \mathbb{R}^m$ is noise, and $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is forward operator, the Tikhonov regularization is expressed as: $J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|L_1 m\|_2^2$, where $\lambda > 0$ is the regularization parameter controlling the conditioning of the problem and matrix L is a regularization operator. The Tikhonov regularization brings the advantage of linearity of the problem so that m can be determined analytically by solving normal equations $\hat{m} = (G^T G + \lambda L_1^T L_1)^{-1} G^T d$.

The TV regularization restricts the domain of possible candidate solutions to those having sparse gradient, and can be expressed as the following minimization equation: $J = \|d - Gm\|_2^2 + \lambda \|L_1 m\|_1$ with a solution m which can be determined

by solving normal equations: $(G^T G + \frac{\lambda}{2} L_1^T \mathcal{G}^{k+1} L_1) m^{k+1} = G^T d$, where $\mathcal{G}^{k+1} = \text{diag}_{i=1 \dots M-1}(\frac{1}{\sqrt{[L_1 m^k]^2} + \varepsilon})$ is a diagonal

matrix and ε is a small positive number.

A technique for solving inverse problems based on a combination of second order Tikhonov and TV regularizations is

proposed. Assume signal x is a combination of two signals $x = x_1 + x_2$, where x_1 is a blocky component and x_2 is a smooth component of x . The proposed method can be approximated by using a new minimization problem of the form $\arg \min_{x_1, x_2} \left(\|y - G(x_1 + x_2)\|_2^2 + \mu \|L_2 x_2\|_2^2 + \xi \|L_1 x_1\|_1 \right)$, where μ , ξ are regularization parameters, and L_1 and L_2 are first-order and second-order derivative operators. An iteratively re-weighted least squares (IRLS) technique is used as a fast and an efficient algorithm for minimization of the cost function. The solution x can be determined iteratively by solving normal weighted equations:

$$\begin{cases} (G^T G + \frac{\mu \xi}{2} L_1^T \mathcal{G}(x_1) L_1) x_1 + G^T G x_2 = G^T y, & \text{where } \mathcal{G}(x_1) = \text{diag}_{i=1 \dots M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{[L_1 x_1]_i^2} + \varepsilon} \right) \text{ is a diagonal matrix and } \varepsilon \text{ is a small} \\ G^T G x_1 + (G^T G + \mu L_2^T L_2) x_2 = G^T y \end{cases}$$

positive number. In this study, a method also is presented for determination of the regularization parameters similar to the L-curve method.

Results and Conclusions

In this paper, a technique for solving inverse problems based on a combination of second order Tikhonov and TV regularizations is proposed. The method eliminates their individual weaknesses and recovers both blocky and smooth portions of the model.
